كلية العلوم — نموذج إجابة — المستوى: الثاني

قسم الرياضيات — شعبة: رياضيات + حاسبات — المادة: تحليل حقيقي

إجابة السؤال الأول

أ) (i) $-(a+b)=(-1)(a+b)=(-1)(a)+(-1)(b)=(-a)+(-b)$

(ii) $(-d)(-(d^{-1}))=(d)(d^{-1})=1 \Rightarrow (-d)^{-1}(-d)(-(d^{-1}))=1\cdot(-d)^{-1}$

$$\Rightarrow -(d^{-1})=(-d)^{-1}$$

ب) خاصية الكمال "لأي مجموعة جزئية $E\neq\phi$ من R ومحدودة من أعلى يوجد عدد حقيقي U بحيث أن $\sup E=U$". ومنه المجموعة $E=\{x\in Q: 0\leq x<\sqrt{3}\}$ لا تحقق خاصية الكمال لأنه على الرغم بأنها محدودة من أعلى بـ $\sqrt{3}$ وكذلك $\sup E=\sqrt{3}$ ولكن $\sqrt{3}\notin Q$ والخاصية تقول بأن $\sup E$ لابد أن يوجد في المجموعة Q.

جـ) البرهان: نفرض أن الجملة ليست صحيحة أي أنه يوجد x في $I=R^+$ بحيث أن $n\leq x$ لكل n في N. ومن خاصية الكمال يوجد U في R بحيث أن $U=\sup N$ لأن x هنا حد أعلى للمجموعة N وعليه فإنه باستخدام خاصية التقريب فإنه لكل $\epsilon>0$ يوجد n_ϵ في N بحيث أن $U-\epsilon<n_\epsilon\leq U$. بوضع $\epsilon=1$ فإنه يوجد $n_1\in N$ بحيث أن $U-1<n_1\leq U$ ومن ذلك $U<(n_1+1)$ وهذا يناقض أن: $U=\sup N$. وهذا يعني أن الفرض خطأ أي أن الجملة صحيحة.

إجابة السؤال الثاني

أ) نفرض أن $\epsilon>0$ وبما أن $|a|>0$ فإن $(|a|/\epsilon)>0$ وباستخدام خاصية أرشميدس فإنه يوجد عدد N في N بحيث إن: $N>\frac{|a|}{\epsilon}$ أي أن $\frac{\epsilon}{|a|}>\frac{1}{N}$ ومن ذلك نستنتج أنه لكل $n>N$ فإن:

$$\left|\frac{a}{n}-0\right|=\frac{|a|}{n}<\frac{|a|}{N}<|a|\cdot\frac{\epsilon}{|a|}=\epsilon$$

ب) البرهان: من المعطى "(a_n) تحقق شرط كوشي" نقول أنه لكل $\epsilon>0$ يوجد N في R بحيث أن $|a_n-a_m|<\epsilon$ لكل $n,m>N$.

②
وبفرض أن $\varepsilon = 1$ و $m = N+1$ نستنتج أن لكل $n > N$

$|a_n - a_{N+1}| < 1$. ومنه فإن لكل $n > N$: $|a_n| < 1 + |a_{N+1}|$.

بفرض أنه إذا كانت $A = \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}|+1\}$.

نلاحظ أن المجموعة A منتهية من الأعداد الحقيقية الموجبة

لذلك فإن لها عنصراً أكبر وهو $k = \sup A$ ولذلك فإن $|a_n| \le k$

ولكل n بحيث إن $1 \le n \le N$ وكذلك $k \ge |a_{N+1}| + 1$ ومن

هذا نستنتج أن $|a_n| \le k$ ولكل $n > N$ وبتركيب هاتين

النتيجتين نجد أن $|a_n| \le k$ لكل n في $\mathbb{N}$ وهذا هو المطلوب إثباته

ⓑ حتى نبين أن $\lim 2^n = +\infty$ نفرض أن $k > 0$ عدد حقيقي وعلينا

أن نثبت وجود N في $\mathbb{R}$ بحيث إن $a_n > k$: لكل $n > N$ ومن

ذلك فإن $k < a_n$ أي أن $2^n > k$ وعليه فإن $n \ln 2 > \ln k$

وبالتالي فإن $n > \frac{\ln k}{\ln 2}$ بوضع $N = \frac{\ln k}{\ln 2}$ وهذا يعني أن

فإذا فرضنا أن $n > N$، $\forall k > 0, \exists N = \frac{\ln k}{\ln 2}$

فإن $n > \frac{\ln k}{\ln 2}$ وهذا يعني أن $\ln 2^n > \ln k$ أي أن $2^n > k$

ومنه فإن $a_n > k$ لكل $n > N$.

إجابة السؤال الثالث

ⓐ البرهان: بما أن الدالة f متصلة فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن

$|x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$ وبما أن المتباينة:

$\big||f(x)| - |f(c)|\big| \le |f(x) - f(c)|$ صواب فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث إن

$$|x - c| < \delta \Rightarrow \big||f(x)| - |f(c)|\big| < \varepsilon \quad \#$$

ⓑ نلاحظ أن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة عند كل c في $]a, \infty)$ ولإثبات

ذلك نفرض أن $\varepsilon > 0$ وأن $|x - c| < \delta$ فإن

$$|f(x) - f(c)| = |\sqrt{x} - \sqrt{c}| = \frac{|x - c|}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|} < \frac{\delta}{|\sqrt{x} + \sqrt{c}|} < \frac{\delta}{\sqrt{c}} < \varepsilon$$

ومن ذلك فإن $\delta \le \varepsilon\sqrt{c}$ وهذا الاتصال موضعي لأن
δ تعتمد على العدد c. ولمناقشة الاتصال المنتظم على الفترة
$[a,\infty)$ نقول أن: $\delta = \inf\{\varepsilon\sqrt{c} : c \ge a\} = \varepsilon\sqrt{a} > 0$
وحيث إن العلاقة $\delta = \varepsilon\sqrt{a}$ لا تعتمد على الموضع c فإن
الاتصال للدالة $f(x)=\sqrt{x}$ اتصالاً منتظماً على الفترة $[a,\infty)$
لكل $a>0$. والآن لإثبات أن الدالة لا تحقق شرط ليبشتز
نفرض أن الدالة تحقق شرط ليبشتز لذلك يوجد $k>0$
بحيث إن $|f(x)-f(y)| \le k|y-x|$ لكل x، y في الفترة
$[a,\infty)$. فإذا فرضنا $y=a$ فإن $|\sqrt{x}-\sqrt{a}| \le k|x-a|$
ولكن هذه المتباينة ليست صحيحة لعدد ثابت k ولجميع قيم
x في الفترة $[a,\infty)$. أي أن الفرض خطأ وبالتالي لا تحقق
شرط ليبشتز.

(ج) الآن نبحث عن المشتقة للدالة $f(x)$ عند $x=0$ لذلك نقول أن

$$f'(x) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{x^2\sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}$$

وباستخدام نظرية الحصر فإن $0 \le |x\sin(\frac{1}{x})| \le |x|$ وبما أن
$\lim_{x\to0}|x| = 0$ فإن $f'(0)=0$ أي أن الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=0$.
وكذلك من هنا نجد أن:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

نلاحظ أن المشتقة ليست متصلة عند $x=0$ لأن:
$\lim_{x\to0} f'(x) = \lim_{x\to0} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \lim_{x\to0}\cos(\frac{1}{x})$ غير موجودة حيث إن
$\lim_{x\to0} 2x\sin(\frac{1}{x}) = 0$ و $\lim_{x\to0}\cos(\frac{1}{x})$ غير موجودة وبالتالي فإن
$\lim_{x\to0} f'(x) \neq f(0) = 0$ أي أن f' غير متصلة عند $x=0$.

إجابة السؤال الرابع

[أ] البرهان: نفترض أن $f = \lim\limits_{u} f_n$ ، لذلك فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث أن $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a,b]$ وبما أن ε لا تعتمد على x فإن ε حد أعلى للمجموعة $\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\}$ وبالتالي فإن: $\|f_n - f\| = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [a,b]\} \le \varepsilon,$ لكل $n > N$ أى أن $\lim \|f_n - f\| = 0$ وبالعكس إذا فرضنا أن $\lim \|f_n - f\| = 0$ فإن لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $N(\varepsilon)$ بحيث إن $n > N \Rightarrow \|f_n - f\| < \varepsilon$ ومن خصائص sup. فإن: $|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|, \forall x \in [a,b]$ وهذا يعنى أنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجد N بحيث إن $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, x \in [a,b]$ أى أن $f = \lim\limits_{u} f_n$.

[ب] لاثبات ذلك نفترض أن: $n_k = k$ ، $x_k = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{k}}$ مع اختيار $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ فإن $f_k(x_k) = ((\frac{1}{2})^{\frac{1}{k}})^k = \frac{1}{2}$ ، $f(x_k) = 0$ لكل k فى N ومن ذلك فإن $|f_k(x_k) - f(x_k)| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ وهذا يؤكد أن (f_n) لا تتقارب منتظماً من f .

[ج] نجد المشتقة f' وهى
$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
وبما أن $|f'(x)| \le |2x\sin(\frac{1}{x})| + |\cos(\frac{1}{x})| < 2 + 1 = 3$ لكل x فى $[0,1]$ أى أن المشتقة f' محدودة وعليه فإن الدالة
$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}), & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
ذات تغير محدود.