جـامعه بنـــــها
كليه الـــعلوم
قسم الرياضيات

الزمن: ٣ ساعات
الترم : الأول
التاريخ: ٢٠١٥/١/١٤

إجابــــــــــة أمتحان مادة الرياضيات والحاسب للفرقة الثانية (ك وف) نظام قديم

السؤال الأول:

أ- إذا كانت $z = x\sin y + x^2$ أوجد كل من

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

الحــــل

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y + 2x \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \cos y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x\sin y \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos y$$

نلاحظ أن $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ وهذا يتحقق دائماً إذا كانت المشتقات التفاضلية الأولى موجودة وكانت z_{xy} z_{yx} دوال متصلة ٠

ب- أحسب قيمة التكامل التالي بطريقتين

$$\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy\, dx$$

الحــــل:

برسم منطقة التكامل وهي

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = x^2$$

الطريقة الأولى:

بأخذ عنصر المســـــاحة شريحة رأسية فتكون حدود التكامل هي

$$x : 0 \to 1 \quad , \quad y : 0 \to x^2$$

ويكون التكامل

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 + y^2)\, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} dx$$

$$=\int_0^1\left[x^4+\frac{x^6}{3}\right]dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{26}{105}$$

الطريقة الثانية:

بأخذ عنصر المساحة شريحة أفقية فتكون حدود التكامل هي

$$y:0\to1\quad,\quad x:\sqrt{y}\to1$$

وبذلك يكون:

$$I=\int_0^1\left(\int_{\sqrt{x}}^1(x^2+y^2)dx\right)dy=\int_0^1\left[\frac{x^3}{3}+xy^2\right]_{\sqrt{y}}^1 dy$$

$$=\int_0^1\left[\left(\frac{1}{3}+y^2\right)-\left(\frac{y^{3/2}}{3}+y^{5/2}\right)\right]dy$$

$$=\left[\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}-\frac{2}{15}y^{5/2}-\frac{2}{7}y^{7/2}\right]_0^1=\frac{26}{105}$$

السؤال الثانى:

أ- أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$z=x+y+\frac{a^3}{xy}$$

ومدى اعتماد ذلك على قيمة الثابت a .

الحـــل

أولاً نوجد النقط الحرجة

$$z_x=1-\frac{a^3}{x^2y}=0$$

$$z_y=1-\frac{a^3}{xy^2}=0$$

من هاتين المعادلتين واضح أن

$$x\neq0\qquad,\qquad y\neq0$$

إذن

$$x^2y-a^3=0 \quad , \quad xy^2-a^3=0$$

$$\therefore x^2y-xy^2=0 \Rightarrow xy(x-y)=0 \Rightarrow x=y$$

$$\therefore x=y=a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة وهي (a,a)

$$z_{xx}=\frac{2a^3}{x^3y} \quad , \quad z_{xy}=\frac{a^3}{x^2y^2} \quad , \quad z_{yy}=\frac{2a^3}{xy^3}$$

عند النقطة الحرجة (a,a) تكون

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\frac{2}{a}\cdot\frac{2}{a}-\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{3}{a^3}>0$$

إذا كانت $a>0$ فإن $z_{xx}=\frac{2}{a}>0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\min}=a+a+\frac{a^3}{a^2}=3a$$

إذا كانت $a<0$ فإن $z_{xx}<0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\max}=a+a+\frac{a^3}{a^2}=3a$$

ب- أوجد مفكوك كل من الدوال الآتية بدلالة قوى x

$$i)\ e^x \qquad ii)\ \ln(1+x)$$

<u>١- الدالة الأسية</u> e^x

لدينا أن

$$f(x)=e^x \quad , \quad f^{(n)}(x)=e^x$$

$$\therefore f(0)=1 \quad , \quad f^{(n)}(0)=1 \quad , n=1,2,3,\ldots$$

بالتعويض في المعادلة (3) نجد أن

$$\therefore e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

هذه المتسلسلة تقاربيه لجميع قيم x وهذا يعني أن هذا المفكوك صحيح لجميع قيم x .

٢- الدالة اللوغاريتمية $\ln(1+x)$

لدينا أن

$$f(x)=\ln(1+x)\,,\ f'(x)=\frac{1}{1+x}\,,\ f''(x)=\frac{-1}{(1+x)^2}\,,$$

$$f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}\,,\cdots\cdots\ ,\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

$$\therefore\ f(0)=\ln(1)=0\,,\ f'(0)=1\,,\ f''(0)=-1\,,$$

$$f'''(0)=2!\,,\cdots\cdots\ ,\ f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$$

$$\therefore \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

وفترة تقارب هذه المتسلسلة هي $-1<x\le 1$.

السؤال الثالث:

أحسب قيمة التكامل التالي بطريقتين

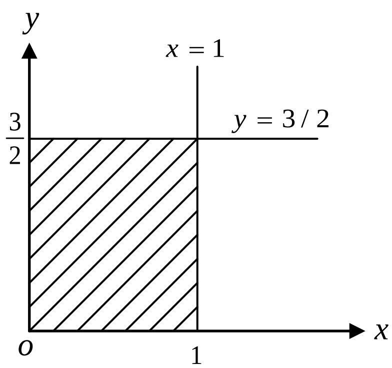
$$\iint_R (4-x^2-y^2)\,dx\,dy$$

حيث R هي المنطقة في المســــتوى xy المحدودة بالمستقيمات

$$x=0\quad,\quad x=1\quad,\quad y=0\quad,\quad y=3/2$$

الحــــل:

واضح أن منطقة التكامل في هذا المثال هي منطقة مســــتوية تمثل هندسياً مستطيل



$$\iint_R (4-x^2-y^2)\,dx\,dy=$$

$$=\int_0^{3/2}\int_0^1\left[(4-x^2-y^2)\,dx\right]dy$$

$$=\int_0^{3/2}\left[4x-\frac{x^3}{3}-xy^2\right]_0^1 dy=\int_0^{3/2}\left[4-\frac{1}{3}-y^2\right]dy$$

$$= \int_0^{3/2} \left[\frac{11}{3} - y^2 \right] dy = \left[\frac{11}{3} y - \frac{y^3}{3} \right]_0^{3/2} = \frac{35}{8}$$

السؤال الرابع:

أـ كون المعادلة التفاضلية التي حلها العام هو

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x$$

الحـــل:

الفكرة هنا هي حذف الثابتين c_1, c_2 من العلاقة (1) ، بتفاضل العلاقة (1) مرة بالنسبة إلى x فإننا نحصل على

$$y' = c_1 e^x + c_2 \qquad (2)$$

$$y'' = c_1 e^x \qquad (3)$$

من العلاقتين (1),(2) ينتج أن

$$xy' - y = (x-1)c_1 e^x = (x-1)y''$$

أي أن المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0$$

ب- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(xy^2 - x)dx + (x^2 y + y)dy = 0$$

الحـــل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\frac{x}{x^2+1} dx + \frac{y}{y^2-1} dy = 0$$

بالتكامل ينتج أن

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx + \int \frac{2y}{y^2-1} dy = A$$

$$\therefore \ln(x^2+1) + \ln(y^2-1) = \ln c$$

$$\therefore (x^2+1)(y^2-1) = c$$

وهذا يسمى بالحل العام للمعادلة التفاضلية ،

جـ أوجد حل المعادلة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$$

جــامعه بنـــــها
كليه الـــــعلوم
قسم الرياضيات

الزمن: ٣ ساعات
الترم : الأول
التاريخ: ٢٠١٥/١/١٤

الحـــل:

نلاحظ أن المستقيمين

$$2x+y-1=0 \quad , \quad 4x+2y+5=0$$

متوازيان ولذلك نستخدم التعويض

$$v=2x+y \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}-2$$

بالتعويض في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\frac{dz}{dx}-2=\frac{z-1}{2z+5} \Rightarrow \therefore \frac{dz}{dx}=\frac{5z+9}{2z+5}$$

و هي معادلة يمكن حلها بفصل المتغيرات

$$\therefore \int \frac{2z+5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

$$\therefore \frac{2}{5}\int \frac{5z+9-9}{5z+9}dz+\int \frac{5}{5z+9}dz=\int dx+c$$

$$\therefore \frac{2}{5}\int dz+\left(-\frac{18}{5}+5\right)\int \frac{dz}{5z+9}=x+c$$

$$\therefore \frac{2}{5}z+\frac{7}{25}\ln(5z+9)=x+c$$

وبالتعويض عن $v=2x+y$ فإن الحل الكامل للمعادلة التفاضلية الأصلية يكون على الصورة

$$10y-5x+7\ln(10x+5y+9)=c_1$$

السؤال الخامس:

أ- أكتب استجابة برنامج الماتلاب للأوامر التالية:

1- >> pencil = 8; , 2- >> 88/4 3- >> x= sqrt (16) ,

4- >> n=1;

>> while n < 10

n=n+2

end

جـــامعه بنـــــها كليه الــــعلوم قسم الرياضيات		الزمن: ٣ ساعات الترم : الأول التاريخ:٢٠١٥/١/١٤

ب- أوجد الأخطاء في العبارات التالية ثم صحح هذه الأخطاء:

1- >> [1 2 3 4; 5 6 7], 2- >> eye[6,3] , 3- >> for n=1 to 10

4- >> while 1+eps > 1 .

<u>الحـــــــــل:</u>

تصحيح الأخطاء:

1- >> [1 2 3 4; 5 6 7,8], 2- >> eye(6,3) , 3- >> for n=1 :10

4- >> while 1+eps > 1 .

<u>السؤال السادس:</u>

إختر الإجابات الصحيحة:

١- هو النسبة بين محيط الدائرة إلي قطرها:

d) j c) pi b) nan a) ans

٢- لمسح كل المتغيرات من الذاكرة:

d) % c) del b) clear a) eps

٣- لكتابة الملاحظات والعناوين:

d) j c) % b) eps a) nan

٤- يستخدم هذا الإسم لكتابة النتائج لأي علاقة حسابية ليس لها إسم:

d) $ c) inf b) pi a) ans

الإجابات الصحيحة:

١- هو النسبة بين محيط الدائرة إلي قطرها:

c) pi

٢- لمسح كل المتغيرات من الذاكرة:

b) clear

٣- لكتابة الملاحظات والعناوين:

c) %

٤- يستخدم هذا الإسم لكتابة النتائج لأي علاقة حسابية ليس لها إسم:

a) ans

جــامعه بنــــها
كلـيه الــــعلوم
قسم الرياضيات

الزمن: ٣ ساعات
الترم : الأول
التاريخ: ٢٠١٥/١/١٤

مع أطيب التمنيات

د/أحمد عبدالخالق