جامعة بنها	الفرقة الثالثة (فيزياء)
كلية العلوم	مادة (إحصائية)
دور يناير ٢٠١٥ نظام ساعات معتمدة	الزمن ٢ ساعات

د./ صلاح عيد إبراهيم حمزة   تاريخ الامتحان: ؟؟؟/ ٠١/ ٢٠١٥

---

1. Write short notes about: Gama space – Energy state – Energy levels

---------------------------------- Solution --------------------------------

س٣ أ) أكتب فكرة مبسطة عن: مستوي الطاقة – فراغ الطور

مستوي الطاقة: إن قواعد الميكانيكا الكلاسيكية أو النيوتونية تصف تصرف المواد في النظام الماكرسكوبي. أما في النظام الميكروسكوبي فإن الميكانيكا الكلاسيكية لا تصلح للتطبيق ويجب استبدالها بميكانيكا الكم حيث يأخذ الجسم كميات محددة من الطاقة ويوجد في مستويات محددة، وعندئذ يقال أن الطاقة ذات الصفة الكمية.

إفترض أن غاز أحادي الذرة يتكون من عدد N من الذرات وموضوع في مكعب طول ضلعة L فإذا كان الجسم يمتلط طاقة حركة انتقالية فقط في اتجاة محور x فإن

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{p^2}{2m} \qquad (١)$$

حيث p هي كمية الحركة. وتنص ميكانيكا الكم علي أنه في الدورة الكاملة فإن حاصل ضرب كمية الحركة في المسافة يساوي مضاعفات صحيحة من الأطوال الموجية، أي أن

$$p_i = n_i \frac{h}{2L} \qquad (٢)$$

بالتعويض في معادلة (١) نحصل علي

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2} m\upsilon^2 = \frac{p^2}{2m} = n_i^2 \frac{h^2}{8mL^2}$$

أو

$$n_i = \frac{L}{h}\sqrt{8m\varepsilon_i}$$

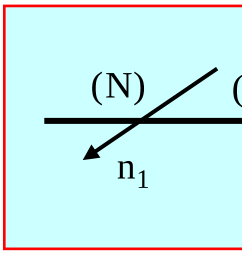
حيث $n_x,\ n_y,\ n_z$ تحدد حالات الجسم والطاقة ε_i المقابلة للقيم المختلفة ل n_i^2 هي طاقة المستويات المختلفة.

فراغ الطور : يتكون فراغ الطور لعدد N من الجسيمات من 2f من الابعاد حيث f هي عدد الاحداثيات العامة مثل الموضع وكمية الحركة ويوصف النظام الذي يتكون من عدد N جسيم بنقطة واحدة في فراغ الطور

2. Prove the following relation for the occupation number n_i due to Boltzmann distribution $n_i = \sum_i \frac{N}{Z} e^{-\beta\varepsilon}$

---------------------------------- Solution ---------------------------------

Let the number of allowed states associated with the energy ε_i be g_i. Let us first calculate the number of ways of putting n_1 particles of N particles in one box, then n_2 out of $N - n_1$ in second, and so on until we have exhausted all of the particles. The number of ways of choosing n_1 particles out of N particles is given by



$$W_1 = \frac{N!}{(N-n_1)!\ n_1!} \qquad (1)$$

and the number of choosing n_2 out of $N-n_1$ is:

$$W_2 = \frac{(N-n_1)!}{(N-n_1-n_2)!\ n_2!} \qquad (٢)$$

and the number of ways of achieving this arrangement is

$$W = W_1 \cdot W_2 \ \cdots$$

$$= \frac{N!}{(N-n_1)!\ n_1!} \cdot \frac{(N-n_1)!}{(N-n_1-n_2)!\ n_2!} \ \cdots$$

$$= \frac{N!}{n_1!\ n_2! \quad \cdots \quad n_i!}$$

$$W = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i} \qquad (٣)$$

$$\begin{aligned} \ln W &= \ln N! + \sum_i (n \ln g_i - n \ln n_i!) \\ &= N \ln N + \sum_i (n \ln g_i - n \ln n_i) \end{aligned}$$

To obtain the most probable distribution, we maximize Eq. (3) with

$dN = 0$:

$$\delta \ln W = \sum_i (\ln g_i - n \ln n_i - \frac{n_i}{n_i})\delta n_i = 0$$

$$\delta \ln W = \sum_i (\ln g_i - n \ln n_i - 1)\delta n_i = 0$$

but

$$\delta N = \sum_i \delta n_i = 0 \tag{4}$$

$$\delta U = \sum_i \varepsilon_i \delta n_i = 0 \tag{5}$$

multiply Eq. (4) by $\alpha + 1$ and Eq. (5) bt $-B$ and add the resulting equations to each other:

$$\sum_i (\ln g_i - n \ln n_i + \alpha - \beta\varepsilon_i)\delta n_i = 0 \tag{6}$$

Since n_i is vary independent,

$$\ln g_i - n \ln n_i + \alpha - \beta\varepsilon_i = 0$$

or

$$\ln \frac{g_i}{n_i} + \alpha - \beta\varepsilon_i = 0 \tag{7}$$

Solving Eq. (7) for n_i gives

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\beta\varepsilon_i}$$

٣. Find the relation between the partition function Z and thermodynamic functions U, and S.

------------------------------- **Solution** -------------------------------

(a) Relation between Z and U

Since

$$Z = \sum_i g_i e^{\varepsilon_i / KT}$$

differentiate Z with respect to T, holding V constant,

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V = \sum_i g_i \left(\frac{\varepsilon_i}{KT^2}\right) e^{\varepsilon_i / KT}$$

$$= \frac{1}{KT^2} \sum_i \varepsilon_i g_i \; e^{\varepsilon_i / KT}$$

$$= \frac{1}{KT^2} \frac{\sum_i n_i \varepsilon_i}{\sum_i n_i} g_i \; e^{\varepsilon_i / KT}$$

$$= \frac{ZU}{NKT^2}$$

It follow that

$$U = NKT^2 \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V \qquad (8)$$

and U may be calculated once lnZ is known as a function of T and V.

(b) Relation between Z and S

The entropy S is related to the order or distribution of the particles, through the relation:

$$S = K \ln W$$

but

$$\ln W = -\sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} + N \ln N$$

Hence

$$S = K \ln W = K\left[-\sum_i n_i \ln \frac{n_i}{g_i} + N \ln N\right]$$

By using the relation

$$n_i = \frac{N}{Z} g_i e^{-\varepsilon_i / KT}$$

we have

$$\frac{n_i}{g_i} = \frac{N}{Z} e^{-\varepsilon_i / KT}$$

then

$$\begin{aligned} S = K \ln W &= K\left[-N \ln N + N \ln Z + \frac{U}{KT} + N \ln N\right] \\ &= NKT \ln Z + \frac{U}{T} \end{aligned} \qquad (9)$$

and S may be calculated once lnZ is known as a function of T and V.

4. Find the relation between Z and U, S for an ideal monatomic gas. Taking into account that, the partition function for this system is given by $Z = V\left(\frac{2\pi mKT}{h^2}\right)^{3/2}$

---------------------------------- **Solution** --------------------------------------

(a) Relation between Z and U

Since

$$U = NKT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V$$

So

$$\ln Z = \ln V + \tfrac{3}{2}\ln T + \tfrac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mK}{h^2}\right)$$

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T}$$

So the internal energy has already been established as:

$$U = \tfrac{3}{2}NKT$$

(b) Relation between Z and S

Since

$$S = K\ln W = NK\left[\ln N + T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right]$$

Since

$$\ln Z = \ln V + \tfrac{3}{2}\ln T + \tfrac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mK}{h^2}\right)$$

So

$$\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2T}$$

By substituting we have:

$$S = NK\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{2\pi mK}{h^2}\right) + \frac{3}{2}\right]$$

5. Discus in details the partition function of a harmonic oscillator**.**

-------------------- Solution -----------------------------