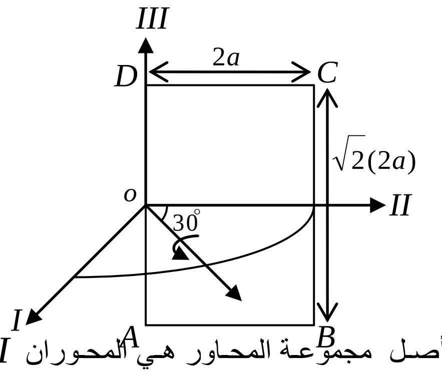
جامعة بنها- كلية العلوم   قسم الرياضيات المستوى الثالث

نموذج إجابة امتحان نهاية الفصل الدراسى الأول   المادة:موضوعات مختارة فى الرياضيات التطبيقية (١)

الزمن : ثلاث ساعات

إجابة السؤال الأول



بأخذ نقطة الدوران الثابتة o نقطة أصل مجموعة المحاور هي المحوران II, III يقعان في مستوى الصفيحة كما هو مبين بالشكل ، المحور I عمودي على مستوى الصفيحة هذه المحاور هي مجموعة محاور قصور ذاتي رئيسية للقصور عند o هذه المجموعة مثبته في الجسم .نفرض أن كتلة الصفيحة m وعرضها $2a$ وطولها $2\sqrt{2}a$ بذلك يكون

$$I_1 = 2ma^2 \quad , \quad I_2 = \frac{1}{3}(2ma^2) \quad , \quad I_3 = \frac{4}{3}(ma^2)$$

بفرض أن $\underline{\omega} = (\omega_1 , \omega_2 , \omega_3)$ **هو متجه السرعة الزاوية للصفيحة**

معادلات أويلر للحركة (الجسم خفيف)

$$I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 = 0$$
$$I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 = 0$$
$$I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 = 0$$

بالتعويض عن قيم I_1, I_2, I_3 **نحصل على**

$$3\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3 = 0 \qquad (1)$$

$$\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1 = 0 \qquad (2)$$

$$\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 = 0 \qquad (3)$$

بالتعويض من (3) في (1) نجد أن $3\dot{\omega}_1\omega_1 + \dot{\omega}_3\omega_3 = 0$

بإجراء التكامل على المعادلة الأخيرة واستخدام الشروط الابتدائية وهي عند $t = 0$ **كانت** $\underline{\omega} = \underline{\Omega}$ **حيث** $\underline{\Omega} = \left(\frac{\Omega}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\Omega, 0\right)$ **نحصل على**

$$3\omega_1^2 + \omega_3^2 = \frac{3\Omega^2}{4}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{3\Omega^2}{4} - \omega_3^2}\ (4)$$

وكذلك من (3),(2) وإجراء التكامل واستخدام الشروط الابتدائية نجد ان

$$\omega_2^2 + \omega_3^2 = \frac{3\Omega^2}{4}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3\Omega^2}{4} - \omega_3^2} \qquad (5)$$

من (5),(4),(3) نحصل على

$$\dot{\omega}_3 = \sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{3\Omega^2}{4} - \omega_3^2\right)$$

$$\int_0^{\omega_3} \frac{d\omega_3}{\frac{3\Omega^2}{4} - \omega_3^2} = \sqrt{\frac{1}{3}}\int_0^t dt$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}\,\Omega}\tanh^{-1}\frac{2\omega_3}{\sqrt{3}\,\Omega} = \sqrt{\frac{1}{3}}\ t$$

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{3}\ r}{2}\tanh\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\ (٦)$$

من (5),(4),(6) نحصل على

$$\omega_1 = \frac{\Omega}{2}\sec h\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{3}\,\Omega}{2}\sec h\left(\frac{\Omega t}{2}\right)$$

إجابة السؤال الثاني

$$\boldsymbol{z = 0 \rightarrow x^2 + y^2 = 1,\quad \underline{F} = (2x-y)\ \underline{i}}$$

$$\boldsymbol{x = cost\ , y = sint\ \ , dx = -sint\ dt}$$

$$\boldsymbol{\oint F.dr = \oint_0^{2\pi} -(2cost - sint)sint\ dt = \left(cos^2 t + \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}sin2t\right)_0^{2\pi} = \pi\ (1)}$$

التكامل السطحي

$$\therefore \nabla \wedge \underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x-y) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \underline{k}$$

$$\iint (\nabla \wedge \underline{F}).\underline{n}ds = \iint \underline{k}.\underline{k}dxdy = \pi$$ (٢)

من (١)و(٢) التكامل الخطي= التكامل السطحي

2 - متجه الوحدة العمودي على السطح

$(2,-2,3)$ عند النقطة $\boldsymbol{x^2y + 2xz = 4}$

$$\nabla\emptyset = (2xy+2z)\underline{i} + x^2\underline{j} + 2x\underline{k} \rightarrow \nabla_{(2,-2,3)}\emptyset = -2\underline{i} + 4\underline{j} + 4\underline{k}$$

$$\underline{\mathbf{N}} = (-\underline{i} + 2\underline{j} + 2\underline{k})/3$$

اجابة السؤال الثالث

١- يكون المجال $\underline{F}$ محافظ إذا كانت

$$\nabla \wedge \underline{F} = 0$$

$$\nabla \wedge \underline{F} = 2\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xy+z^3 & x^2 & 3xz^2 \end{vmatrix} = 0$$

2- لإيجاد دالة الجهد ϕ نعلم أن $\underline{F} = -\nabla\phi$ أي أن

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -(4xy + 2z^3) \quad , \frac{\partial\phi}{\partial y} = -2x^2 \quad , \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = -6xz^2$$

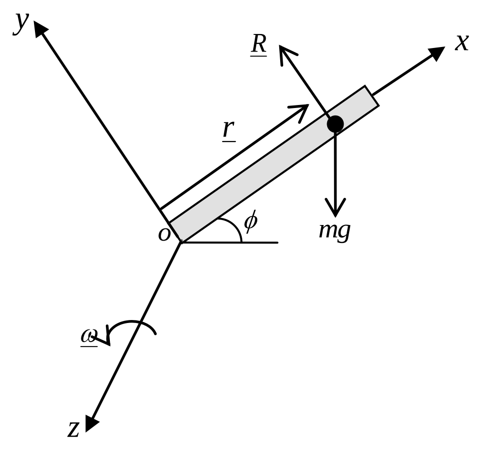
$$\phi = -2x^2y - 2xz^3 + f_1(y,z)$$
$$\phi = -2x^2y \qquad + f_2(x,z)$$
$$\phi = \qquad -2xz^3 + f_3(x,y)$$

$$\phi = -2x^2y - 2xz^3 + const.$$

٣- الشغل المبذول في تحريك جسيم في هذا المجال

$$\int_P^Q \underline{F}\cdot\underline{dr} = -\int_P^Q \nabla\phi\cdot\underline{dr} = -\int_P^Q d\phi = -\phi\Big|_P^Q = \phi(P) - \phi(Q) = \phi(1,-2,1) - \phi(3,1,4) = 404$$

<u>إجابة السؤال الرابع</u>



بإختيار نقطة تقاطع محور الدوران مع الأنبوبه (النقطه الثابته في الفراغ) نقطة اصل o **مجموعة محاور الأسناد** $oxyz$ **مختاره بحيث** ox **ينطبق على محور الأنبوبه ومتجه الوحده** $\hat{e}_1$ **في اتجاه هذا المحور بعيداً عن نقطة الأصل** o oy **عمودي على** ox **وفي المستوى الذي تدور فيه الأنبوبه ومتجه** $\hat{e}_2$ **في اتجاه هذا المحور (في الاتجاه الموجب للدوران)** oz **محور الدوران ومتجه الوحده** $\hat{e}_3$ **في اتجاه هذا المحور وبحيث تكون متجهات الوحده** $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ **مجموعه يمينيه**

محاور الأسناد السابقة هي محاور غير قصوريه وتدور بسرعة زاويه $\underline{\omega}$ **حيث**

$$\underline{\omega} = \omega \hat{e}_3 = (0,0,\omega) \qquad \textbf{(i)}$$

بفرض أن النقطة الماديه تبعد مسافه r **عن محور الدوران في اللحظة الزمنيه** t **فإن متجه موضع النقطة الماديه في** هذه اللحظة يكون

$$\underline{r} = r \hat{e}_1 = (r,0,0) \qquad \textbf{(ii).}$$

معادلة حركة النقطة الماديه

$$m\underline{\ddot{r}} = \underline{F} \qquad (1)$$

القوى المؤثرة على النقطة الماديه

وزن النقطة الماديه mg ورد فعل الأنبوبه $\underline{R}$ (حيث أن الأنبوبه ملساء فإن اتجاه $\underline{R}$ يكون عمودياً على اتجاه محورها)

$$\underline{F} \equiv (-mg\sin\phi\, ,\, R - mg\cos\phi\, ,\, 0) \qquad \text{(iii)}$$

حيث ϕ الزاويه التي يصنعها محور الانبوبه مع الافقي في اللحظه الزمنيه t وحيث أن الأنبوبه بدأت حركتها من وضع افقي وتدور بسرعة زاويه ثابته $\underline{\omega}$ فإن

$$\phi = \omega t \qquad \text{(iv)}$$

متجه عجلة النقطة الماديه

$$\underline{\ddot{r}} = (\ddot{r} - r\omega^2)\hat{e}_1 + 2\omega\dot{r}\hat{e}_2 \qquad \text{(v)}$$

من (iv),(1),(iii),(v) نجد أن

$$\ddot{r} - r\omega^2 + g\sin\omega t = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$2m\omega\dot{r} + mg\cos\omega t = R \qquad \textbf{(3)}$$

الحل العام للمعادله (2) وبإستخدام الشروط الابتدائيه $t = 0 \;\Rightarrow\; r = a \;,\; \dot{r} = v_{\circ}$

$$r = a\cosh\omega t + \left(\frac{v_\circ}{\omega} - \frac{g}{2\omega^2}\right)\sinh\omega t + \frac{g}{2\omega^2}\sin\omega t \qquad (4)$$

وبالتعويض من (4) في (3) نحصل على

$$R = 2ma\omega^2\sinh\omega t + m(2\omega v_\circ - g)\cosh\omega t + 2mg\cos\omega t$$

انتهت الإجابة

تمنياتي لكم بالتوفيق

د.منى الدريني