جامعة بنها . كلية العلوم بسم الله الرحمن الرحيم المستوى الثاني و الثالث و الرابع ر٢٤١ : شعب : البيولوجي

قسم الرياضيات امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول لعام٢٠١٤ /٢٠١٥ م مادة (إحصاء حيوي) الزمن : ساعتان

إجابة أمتحان

يوم الأمتحان :الثلاثاء ٣٠ / ١٢ / ٢٠١٤ م ورقة كاملة

أستاذ المادة : أ . د . / حسني كامل عبد المقصود أستاذ غير متفرغ بقسم الرياضيات بكلية العلوم جامعة بنها

اجابة السؤال الاول:

Y \ X	1	2	3	4	$\sum$
0	0	0.05	0.05	0.10	0.20
1	0.08	0.15	0.10	0.10	0.43
2	0.20	0.12	0.05	0	0.37
$\sum$	0.28	٠.٣٢	0.20	0.2	1

ويمكن تكوين الجدول التالي حيث القيم داخل المربع المظلل بخط عريض تمثل حاصل الضرب $x \times y \times f_{xy}$

Y \ X	1	2	3	4	$\sum$
٠	٠	٠	0	0	0
١	0.08	٠.٣٠	٠.٣٠	٠.٤٠	1.08
٢	٠.٤	٠.٤٨	٠.٣٠	٠	1.18
$\sum$	٠.٤٨	٠.٧٨	٠.٦	٠.٤	2.26

وكذلك تكوين الجدولين التالين للتوزيعات الهامشية لكل من X,Y كالتالي :

جدول توزيع X :

x	1	2	3	4	$\sum$
f_x	0.28	٠.٣٢	0.2	0.2	1
$x \times f_x$	0.28	0.64	0.6	0.8	2.32
$x^2 \times f_x$	0.28	1.28	1.8	3.2	6.56

جدول توزيع Y :

y	g_y	$y \times g_y$	$y^2 \times g_y$
0	٠.٢	٠	٠
١	٠.٤٣	٠.٤٣	٠.٤٣
٢	٠.٣٧	٠.٧٤	١.٤٨
$\sum$	١	١.١٧	١.٩١

و بالتعويض في العلاقة

$$r=\frac{N\sum xyf_{xy}-\left(\sum xf_x\right)\times\left(\sum yg_y\right)}{\sqrt{\left[N\sum x^2f_x-\left(\sum xf_x\right)^2\right]\times\left[N\sum y^2g_y-\left(\sum yg_y\right)^2\right]}}$$

نحصل علي

$$r=\frac{1\times 2.26-(2.32)\times(1.17)}{\sqrt{\left[1\times 6.56-(2.32)^2\right]\times\left[1\times 1.91-(1.17)^2\right]}}$$

$$=\frac{-0.4544}{\sqrt{(1.1776)(0.5411)}}=-0.57$$

مما يعنى أن الارتباط بين x, y هو ارتباط عكسي .

اجابة السؤال الثاني (أ):

قيمة a

$$\int f(x)dx=1$$

$$\int_0^2 ax(2-x)dx=1$$

$$\left[a\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2=1$$

$$a\times\frac{4}{3}=1$$

$$a=\frac{3}{4}$$

احتمال أن يكون وقت الإنتظار يتراوح بين دقيقة وثلاث دقائق هو :

$$P(1<X<3)=\int_1^2\frac{3x}{4}(2-x)dx=\frac{3}{4}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right]_1^2=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{2}$$

لإيجاد التوقع الرياضي EX و الانحراف المعياري σ

$$EX=\int x\times f(x)dx=\int_0^2 x\times\frac{3x}{4}(2-x)dx=\frac{3}{4}\left[\frac{2x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right]_0^2=1$$

$$\sigma^2=\int x^2\times f(x)dx-(EX)^2=\int_0^2 x^2\times\frac{3x}{4}(2-x)dx-(1)^2=\frac{3}{4}\left[\frac{2x^4}{4}-\frac{x^5}{5}\right]_0^2-1=1.6-1=0.6$$

$$\therefore\sigma=0.77$$

دالة التوزيع التراكمية F(x) هي :

$$F(x)=\left\{\begin{matrix}0 & x<0\\ \int_0^x\frac{3x}{4}(2-x)dx=\frac{3}{4}\left[x^2-\frac{x^3}{3}\right] & 0\le x\le 2\\ 1 & x>2\end{matrix}\right\}$$

اجابة السؤال الثاني (ب):

دالة التوزيع التراكمية F(x) هي :

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<-5\\ 0.15 & -5\le x<0\\ 0.4 & 0\le x<3\\ 0.8 & 3\le x<20\\ 1 & x\ge 20\end{cases}$$

لإيجاد التوقع الرياضي EX و الانحراف المعياري σ

x	−5	0	3	20	$\sum$
p(x)	0.15	0.25	0.4	0.2	1
x p(x)	−0.75	0	1.2	4	4.45
x^2 p(x)	3.75	0	3.6	80	87.35

$$EX=\sum xp(x)=4.45$$

$$\sigma=\sqrt{\sum x^2p(x)-(EX)^2}$$
$$=\sqrt{87.35-(4.45)^2}=8.22$$

اجابة السؤال الثالث (أ):

$$\bar{x}=\frac{\sum xf}{\sum f}=\frac{297.5}{35}=8.5$$
$$\sigma^2=\frac{\sum x^2 f}{\sum f}-\bar{x}=\frac{2681.75}{35}-(8.5)^2=76.62-72.25=4.37$$
$$\therefore \sigma=\sqrt{4.37}=2.09$$

معامل الأختلاف

$$C.V=\frac{\sigma}{\bar{x}}=\frac{2.09}{8.5}=0.25$$

اجابة السؤال الثالث (ب):

معامل ارتباط بيرسون :

رقم المريض	عدد ساعات النوم قبل العلاج x	عدد ساعات النوم بعد العلاج y	x^2	y^2	xy
1	6	9	36	81	54
2	5	4	25	16	20
3	7	9	49	81	63
4	4	7	16	49	28
5	5	6	25	36	30
$\sum$	27	35	151	263	195

معامل ارتباط بيرسون r يعرف كالتالي:

$$r = \frac{\sum xy + N \times \bar{x} \times \bar{y}}{N \times \sigma_x \times \sigma_y}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{27}{5} = 5.4 \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{151}{5} - (5.4)^2} = \sqrt{30.2 - 29.16} = \sqrt{1.04} = 1.02$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{35}{5} = 7 \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum y^2}{N} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{263}{5} - (7)^2} = \sqrt{52.6 - 49} = \sqrt{3.6} = 1.9$$

$$r = \frac{195 + 5 \times 5.4 \times 7}{5 \times 1.02 \times 1.9} = \frac{195 - 189}{9.88} = \frac{6}{9.88} = 0.61$$

أذن الأرتباط طردي .

معامل ارتباط سبيرمان :

رقم المريض	عدد ساعات x النوم قبل العلاج	عدد ساعات y النوم بعد العلاج	رتبة X	رتبة Y	D	D^2
1	**6**	**9**	**4**	**4.5**	**−0.5**	**0.25**
2	**5**	**4**	**2.5**	**1**	**1.5**	**2.25**
3	**7**	**9**	**5**	**4.5**	**0.5**	**0.25**
4	**4**	**7**	**1**	**3**	**−2**	**4**
5	**5**	**6**	**2.5**	**2**	**0.5**	**0.25**
$\sum$	**27**	**35**				**7**

معامل الأرتباط لسبيرمان (معامل الرتب)

$$r = 1 - \frac{6\sum D^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \times 7}{5(25 - 1)} = 1 - 0.35 = 0.65$$

أذن الأرتباط طردي .

واضح أن معامل ارتباط بيرسون مختلف عن معامل الأرتباط لسبيرمان (معامل الرتب) ولكن الأدق هو معامل ارتباط بيرسون .

اجابة السؤال الثالث (جـ):

خط انحدار X على Y يمكن كتابته على الصورة .

$$X = aY + b$$

حيث a,b **ثوابت تحقق المعادلتين**

المعادلات الإعتداليه

$$\sum X = a\sum Y + Nb$$
$$\sum XY = a\sum Y^2 + b\sum Y$$

وبالتعويض في المعادلات الأعتدالية في المعادلتين الأخيرتين

60=70a+10b

374=536a+70b

بحل المعادلتين في $\mathbf{a,b}$ **سواء بالحذف أو بالمحددات نجد أن**

b=6 − 7a , 374=536a+70(6−7a)

a=−1 , b=−1

ويصبح خط انحدار N على n يمكن كتابته على الصورة .

$$X=-1-Y \qquad \rightarrow \qquad X+Y+1=0$$

اجابة السؤال الرابع (أ):

X متغير عشوائي يمكن أن يأخذ القيم $2,3,4,5,6,,7,8,9,10,11,12$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E[X]=2\times\frac{1}{36}+3\times\frac{2}{36}+4\times\frac{3}{36}+5\times\frac{4}{36}+6\times\frac{5}{36}+7\times\frac{6}{36}+$$

$$8\times\frac{5}{36}+9\times\frac{4}{36}+10\times\frac{3}{36}+11\times\frac{2}{36}+12\times\frac{1}{36}=7,$$

$$\sigma^2[X]=\sum_i(x_i-E[X])^2p_i$$

$$=(2-7)^2\times\frac{1}{36}+(3-7)^2\times\frac{2}{36}+(4-7)^2\times\frac{3}{36}+(5-7)^2\times\frac{4}{36}$$

$$+(6-7)^2\times\frac{5}{36}+(7-7)^2\times\frac{6}{36}+(8-7)^2\times\frac{5}{36}+(9-7)^2\times\frac{4}{36}$$

$$+(10-7)^2\times\frac{3}{36}+(11-7)^2\times\frac{2}{36}+(12-7)^2\times\frac{1}{36}=\frac{210}{36}$$

$$\sigma^2=210/36=\frac{35}{6}$$

Y متغير عشوائي يمكن أن يأخذ القيم 0,1,2,3,4,5

y	0	1	2	3	4	5
p	6/36	10/36	8/36	6/36	4/36	2/36

$$E[Y]=\sum_i y_iP_i(x)y=\sum_{i=0}^{5}y_iP(y_i)$$

$$=0\times\frac{6}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}$$

$$=\frac{70}{30}=\frac{7}{3}$$

$$\sigma^2[Y]=\sum_i(y_i-E[Y])^2p_i$$

$$=\left(0-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{6}{36}+\left(1-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{10}{36}+\left(2-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{8}{36}+\left(3-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{6}{36}$$

$$+\left(4-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{4}{36}+\left(5-\frac{7}{3}\right)^2\times\frac{2}{36}=\frac{119}{54}$$

$$E(X-3Y)=E(X)-3E(Y)=7-3\times\frac{7}{3}=0$$

$$\sigma^2\left(6X-\sqrt{54}Y\right)=36\times\sigma^2(X)+(54)\times\sigma^2(Y)=36\times\frac{35}{6}+(54)\times\frac{119}{54}=210+119=329$$

<u>اجابة السؤال الرابع (ب):</u>

لإيجاد التوقع الرياضي EX و التباين $\sigma^2(X)$

$$E(X)=\int x\times f(x)dx=\int_1^4 x\times\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^4=\frac{5}{2}$$

$$\sigma^2(X)=\int x^2\times f(x)dx-(EX)^2=\int_1^4 x^2\times\frac{1}{3}dx-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4-\frac{25}{4}=7-\frac{25}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\int f(y)dy=1$$

$$\int_0^1 Cydy=1$$

$$\left[C\left(\frac{y^2}{2}\right)\right]_0^1=1$$

$$C\times\frac{1}{2}=1$$

$$C=2$$

لإيجاد التوقع الرياضي EY و التباين $\sigma^2(Y)$

$$EY=\int y\times f(y)dy=\int_0^1 y\times 2ydy=2\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

$$\sigma^2(Y)=\int y^2\times f(y)dy-(EY)^2=\int_0^1 y^2\times 2ydy-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$$

$$E(6X-6Y)=6\times E(X)-6\times E(Y)=6\times\frac{7}{3}-6\times\frac{2}{3}=10$$

$$\sigma^2(2X-6Y)=4\times\sigma^2(X)+36\times\sigma^2(Y)=4\times\frac{3}{4}+36\times\frac{1}{18}=5$$