جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيات

لطلاب المستوى الأول

يوم الامتحان: الاربعاء ٣١ / ١٢ / ٢٠١٤ م

المادة : رياضيات عامة (١) (١٠٠ ر)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال عبدالغنى

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

اسئله + نموذج إجابه

ورقة كاملة

جـــامعة بنـــــها
كلـية الــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
رياضيات عامة (١) (١٠٠ ر)
التاريخ: ٢٠١٤/١٢/٣١

رياضيات عامة (١) (١٠٠ ر) لطلاب المستوى الأول

أجب على الاسئله التاليه (الدرجة الكلية ٨٠ درجة)

السؤال الأول (16 درجة) :-

١- **أثبت** صحة العلاقة التالية بطريقة الأستنتاج الرياضي:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

٢- **عين** الكسور الجزئية للدالة الكسرية التالية:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

السؤال الثانى (18 درجة) :-

١- **أوجد** الأربعة حدود الأولى فى المفكوك $(1+x^2)^{-1}$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

٢- **عين** $\frac{dy}{dx}$ للدوال الأتية :

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

III. $y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}$

السؤال الثالث (16 درجة) :-

١- مستخدما طريقة كرامر **أوجد** حل مجموعة المعادلات الخطية التالية :

$$2x+3y-z=4$$
$$3x+y+2z=13$$
$$x+2y-5z=-11$$

٢- بأستخدام نظرية دى موافر **أوجد** جذور المعادلة التالية :

$$z^3=\sqrt{3}+i$$

السؤال الرابع (14 درجة) :-

١- **أوجد** مشتقة الدالة $f(x)=x^3+1$ عند النقطة x بأستخدام التعريف.

٢- **عين** المعكوس للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

<u>السؤال الخامس (16 درجة)</u> :

١- **أوجد** قيمة النهاية الأتية:

I. $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

II. $\underset{x\to 0}{Lim}\dfrac{1-\cos x}{x^{2}}$

٢- **أوجد** مفكوك مكلورين للدالة :

$$y=\sin x$$

....

انتهت أسئلة

مع أطيب تمنياتنا بالتوفيق والنجاح

<u>المشتركين فى الأمتحان</u>

أ.د عبدالرحيم النجار

أ.د / محمود عبد العاطى

د/أحمد مصطفى

د/ محمد السيد عبدالعال

د/ عصام محسن

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات عامة (١) (١٠٠ ر) لطلاب المستوى الأول

(الدرجة الكلية ٨٠ درجة)

اجابة السؤال الأول (16 درجة) :-

١- أثبت صحة العلاقة التالية بطريقة الأستنتاج الرياضي:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

الحــــــــــــــل

١- فى حالة $n=1$ فإن الطرف الأيسر يساوى ١ والطرف الأيمن يساوى $\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$

اى أن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

٢- نفرض صحة العلاقة المعطاة عندما $n=k$ اى ان:

$$1+2+3+....+k=\frac{k(k+1)}{2} \qquad (١)$$

ونحاول اثبات العلاقة عندما $n=k+1$ وذلك باستخدام العلاقة (١) اى نريد اثبات :

$$1+2+3+....+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$L.H.S.=1+2+3+....+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=$$

$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=R.H.S$$

اى ان العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ ، اى ان العلاقة صحيحةلجميع قيم k.

==

١- **عين** الكسور الجزئية للدالة الكسرية التالية:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

الحــــــــــــــل

بأجراء الكسور الجزئية على الكسر كالتالى:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

وبضرب الطرفين فى المقام نحصل على :

$$3x^2-x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

بوضع $x=-1$ نحصل مباشرتاَ على قيمة $A=\frac{5}{2}$ وبالتالى يكون الناتج بعد مقارنة المعاملات:

$$3=\frac{5}{2}+B \Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$-1=B+C \Rightarrow C=-\frac{3}{2}$$

من ثم نحصل على الكسور الجزئية كالتالى:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{x-3}{2(x^2+1)}$$

===

أجابة السؤال الثانى (18 درجة) :-

١- أوجد الأربعة حدود الأولى فى المفكوك $(1+x^2)^{-1}$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

الحـــــــــــل

باستخدام مفكوك ذات الحدين نجد ان :

$$(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

===

٢- عين $\frac{dy}{dx}$ للدوال الأتية :

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

III. $y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}$

الحـــــــــــل

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\ln y=\tan x\cdot\ln(2+\sec x)$$

$$\frac{y'}{y}=\tan x\cdot\frac{\sec x\tan x}{2+\sec x}+\sec^2 x\cdot\ln(2+\sec x)$$

بضرب طرفي المعادلة الســـــابقة في $y=(2+\sec x)^{\tan x}$ نحصل

على المشتقة المطلوبة

$$y'=\left[\frac{\sec x\tan^2 x}{2+\sec x}+\sec^2 x\cdot\ln(2+\sec x)\right]\cdot(2+\sec x)^{\tan x}$$

=-=-=-=-====---===--=-=-=-=-=-=

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

$$\because y=e^{\cos\sqrt[3]{x}}=e^{\cos x^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow\therefore y'=e^{\cos\sqrt[3]{x}}\cdot(-\sin\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

===============

III. $y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}$

$$y=\ln\sqrt[5]{4+\cot 3x}=\frac{1}{5}\ln(4+\cot 3x)$$

$$\therefore y'=\frac{1}{5}\cdot\frac{-3\cos ec^2 3x}{4+\cot 3x}=-\frac{3\cos ec^2 3x}{5(4+\cot 3x)}$$

==

أجابة السؤال الثالث (16 درجة) -:

١- **مستخدما طريقة كرامر أوجد حل مجموعة المعادلات الخطية التالية** :

$$2x + 3y - z = 4$$
$$3x + y + 2z = 13$$
$$x + 2y - 5z = -11$$

الحـــــــــــــل

بما أن

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 28 \neq 0$$

إذن للمجموعة حل محدد على الصورة

$$\frac{x}{\Delta_x} = \frac{-y}{\Delta_y} = \frac{z}{\Delta_z} = \frac{-1}{\Delta}$$

حيث

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -13 \\ 2 & -5 & 11 \end{vmatrix} = -56 \,, \; \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 3 & 2 & -13 \\ 1 & -5 & 11 \end{vmatrix} = 28$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -13 \\ 2 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -84$$

إذن حل المجموعة هو

$$\frac{x}{-56} = \frac{-y}{28} = \frac{z}{-84} = \frac{-1}{28} \Rightarrow \therefore x = 2, y = 1, z = 3$$

==

٢- **بأستخدام نظرية دى موافر أوجد جذور المعادلة التالية** :

$$z^3 = \sqrt{3} + i$$

الحـــــــــل

نكتب أولاً العدد $\sqrt{3}+i$ في الصورة القطبية حيث

$$r=\sqrt{3+1}=2 \quad , \quad \theta=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

وحيث أن $\cos\theta, \sin\theta$ دوال دورية ودورة كل منهما 2π فإن

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\right)$$

ولإيجاد قيم z الثلاثة التي تحقق المعادلة السابقة (جذور المعادلة)

$$z^3=2\left(\cos\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\right)$$

$$\therefore z=2^{1/3}\left(\cos\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]+i\sin\left[\frac{\pi}{6}+2k\pi\right]\right)^{1/3}$$

$$=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left[\frac{1+12k}{18}\pi\right]+i\sin\left[\frac{1+12k}{18}\pi\right]\right)$$

حيث $k=0,1,2$ وبالتعويض عن هذه القيم الثلاثة نحصل على الجذور الثلاثة للمعادلة .

===

أجابة السؤال الرابع (14 درجة) :-

١- **أوجد مشتقة الدالة** $f(x)=x^3+1$ **عند النقطة x بأستخدام التعريف.**

الحـــــــــل

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^3+1$$

$$=x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3+1$$

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2\right]=3x^2$$

==

٢- عين المعكوس للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الحـــــــــــــل

أولاً: نوجد مصفوفة محددات العناصر وهي

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & -7 & 8\\ 5 & 3 & -7\end{bmatrix}$$

ثانياً: نوجد مدور هذه المصفوفة

$$A_{adj}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & -7 & 3\\ 5 & 8 & -7\end{bmatrix}$$

ثالثا: نوجد قيمة محددة المصفوفة

$$|A|=25$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A_{adj}}{|A|}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحة هذا المعكوس نوجد

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-==-=-=-=-=-=-=-=-=--=-=-==-=-=-=-=

أجابة السؤال الخامس (16 درجة) :

١- **أوجد قيمة النهاية الأتية:**

I. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

II. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$

الحـــــــــــل

ا. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

.II $ii)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

$$i)\ \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

==

٢- أوجد مفكوك مكلورين للدالة :

$$y = \sin x$$

الحـــــــــــــل

إذا كانت $y = f(x) = \sin x$ فيكون لدينا

$$f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x$$

$$f'''(x) = -\cos x,\ f''''(x) = \sin x, \ldots$$

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1, \ldots$$

وحيث أن $f^{(4)}(x) = \sin x$ فإن القيم $0,1,0,-1$ سوف تتكرر بنفس الترتيب إذن منمفكوك مكلورين نجد أن

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

هذه المتسلسلة تقاربيه أيضاً لجميع قيم x .