جامة بنهـــــــا
كليـة العلــــــوم
قســم الرياضيـــات

المستوى : الثالـــث
المادة : نظرية الزمـر **321** ر
الزمـــن : ســاعتـان

كليـــة العلـــــــــوم

اختبار الفصل الدراسي الأول لعام ٢٠١٤ / ٢٠١٥ م

اجب عن أربع أسئلة فقط مما يلي : [الدرجة الكلية ثمانون درجة]

السؤال الأول : [عشرون درجة]

(أ) عرف كل من : الزمرة الدائرية – رتبة الزمرة – الزمرة الجزئية الناظمية

(ب) إذا كانت $(G , \circ)$ **زمرة و كانت** $a , b , c \in G$ **اثبت أن** $a \circ b = a \circ c \Leftrightarrow b = c$

(جـ) إذا كانت $(G , .)$ **زمرة و كانت** $x \in G$ **اثبت أن** $\langle x \rangle$ **زمرة جزئية من** G **.**

السؤال الثاني : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت $(G , .)$ **زمرة فاثبت أن مركز الزمرة** $Z(G)$ **هو زمرة جزئية ناظمية .**

(ب) إذا كانت $G = (Z_9 , \oplus)$ **فاوجد جميع مولدات الزمرة** G **.**

السؤال الثالث : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت G **زمرة منتهية و كانت** $A \le G$ **فاثبت أن رتبة** A **تقسم رتبة** G **.**

(ب) إذا كانت $A = \langle n \rangle$ **زمرة جزئية من الزمرة** $(Z , +)$ **فاوجد زمرة حاصل القسمة** Z / A **.**

السؤال الرابع : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت $f : (R , +) \to (R^* , \times)$ **بحيث** $f(x) = e^x \;\; \forall \; x \in R$

اثبت أن f **هومومورفيزم غير شامل .**

(ب) إذا كانت $f : (Z_4 , \oplus) \to (Z_5^* , \otimes)$ **بحيث** $f(r) = 3^r \;\; \forall \; r \in Z_4$

(١) اثبت أن f **هومومورفيزم أحادى (٢) اوجد النواة للتطبيق** f **.**

(جـ) إذا كانت $g : (Z , +) \to (Z_3 , \oplus)$ **تشاكل زمرى بحيث** $g(m) = \overline{m} \; , \; \forall m \in Z$

فاوجد $Ker(g)$ **.**

السؤال الخامس : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت G_1 , G_2 زمرتان بحيث أن : $G = G_1 \times G_2$ فاثبت أن G زمرة ابدالية إذا و إذا فقط إذا كانت كل من G_1 , G_2 زمرة ابدالية .

(ب) إذا كانت $G = \langle a , b \,/\, a^2 = b^2 = (a\,b)^2 = 1 \rangle$ فاوجد زمرتين جزئيتين A_1 , A_2 من الزمرة G بحيث أن $G = A_1 \otimes A_2$.

انتهت الأسئلة

مع أطيب التمنيات بالتوفيق

الاجابـــــة النموذجيـــة

اجابـــة السؤال الأول : [عشرون درجة]

(ب) - الزمرة الدائرية هى زمرة يوجد بها على الاقل عنصر واحد يولد جميع عناصرها

– رتبة الزمرة هو عدد عناصرها اذا كانت منتهية و اذا كانت غير منتهية فليس لها رتبة

– الزمرة الجزئية الناظمية H هى زمرة جزئية من الزمرة $(G,\circ)$ و تحقق الشر التالى

$$\forall x\in G, \forall a\in H \ : \ x\circ a\circ x^{-1}\in H$$

(ب) إذا كانت $(G,\circ)$ زمرة و كانت $a\ ,\ b\ ,\ c\ \in\ G$ فان

$$a\circ b=a\circ c \iff a^{-1}\circ(a\circ b)=a^{-1}\circ(a\circ c)$$

$$\iff (a^{-1}\circ a)\circ b=(a^{-1}\circ a)\circ c$$

$$\iff e\circ b=e\circ c \iff b=c$$

(جـ) إذا كانت $(G\ ,.)$ زمرة و كانت $x\ \in\ G$ فان $\langle x\rangle$ زمرة جزئية من G لان

$1-\ \because\ \ x\in\langle x\rangle\ \therefore\ \langle x\rangle\neq\phi$

$2-\ \forall\ x^m\ ,\ x^n\in\langle x\rangle\ :\ \ x^m\,(x^n)^{-1}=x^m\ x^{-n}=x^{m-n}\in\langle x\rangle$

حيث $m-n$ عدد صحيح

اجابـــة السؤال الثاني : [عشرون درجة]

(ت)إذا كانت $(G\ ,.)$ زمرة فان مركز الزمرة $Z(G)$ هو زمرة جزئية ناظمية و ذلك لان

$(i)\ ea=ae\ \ \forall\ \ a\in G\ \therefore\ \ e\in Z(G)\ \therefore\ Z(G)\neq\phi$

$(ii)\ \forall\ x\ ,\ y\in Z(G):\ x\,y^{-1}\,a=x\,a\,y^{-1}\ =a\,x\,y^{-1}$

$\therefore x\,y^{-1}\in Z(G)$

$(iii)\ \forall\ x\in Z(G)\ ,\ a\in G:\ a\,x\,a^{-1}\ =\ x\,a\,a^{-1}\ =\ xe\ =\ x\ \in Z(G)$

(ث) إذا كانت $G=(Z_9\ ,\oplus)$ فان جميع مولدات الزمرة G هى

$\{\ \bar{1}\ ,\ \bar{2}\ ,\ \bar{4}\ ,\ \bar{5}\ ,\ \bar{7}\ ,\ \bar{8}\ \ \}$

وذلك لان : $(\bar{9}\ ,\bar{1})=\ (\bar{9},\ \bar{2})=(\bar{9}\ ,\ \bar{4})=(\bar{9},\ \bar{5})=(\bar{9},\ \bar{7})=(\bar{9},\ \bar{8})\ =1$

اجابـــة السؤال الثالث : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت G زمرة منتهية و كانت $A\leq G$ فان رتبة A تقسم رتبة G

البرهان : نفرض ان $|G|=n\ \ ,\ \ |A|=m$ و نفرض التطبيق التالى :

$$f\ :\ A\ \ \to\ Ax,\ \ f(a)=a\,x\ ,\forall\ a\ \in A$$

$$\because\ \ f\,(A)=A\,x\qquad \therefore\ \ f\ \ is\ \ onto$$

$$\because\ \ f\,(a)=f\ \ (b)\ \iff a\,x=bx\ \iff\ axx^{-1}=bxx^{-1}\iff a=b\ \therefore\ f\ \ is\ \ one\,to\,one$$

و بالتالى فان التطبيق تقابل و من ثم

$$|A|\ \ =\ |Ax|\ \ ,\ \forall\ \ x\ \in\ G$$

و بما ان الزمرة منتهية اذن يوجد عدد محدود من صفوف التجاور اليمنى و ليكن عددهم r اى ان

$$G = Ax_1 \cup Ax_2 \cup ... \cup Ax_r \ , \quad Ax_i \cap Ax_j = \phi$$

$$\therefore \ |G| = |Ax_1| + |Ax_2| + ... + |Ax_r|$$

$$\therefore n = m + m + ... + m$$

$$\therefore \ n = r \ m$$

$$\therefore \ m/n$$

$$\therefore \ |A|/|G|$$

(ج) إذا كانت $A=\langle n \rangle$ **زمرة جزئية من الزمرة** $(Z , +)$ **فان زمرة حاصل القسمة** Z / A **هى**

$$Z/A = \{ \ A \ , \ A+1 \ , \ A+2 \ , ... \ , \ A+(n-1) \ \}$$

اجابـــــة السؤال الرابع : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت $f : (R , +) \to (R^* , \times)$ **بحيث** $f(x) = e^x \ \forall \ x \in R$

$$\forall x \ , \ y \in R : \ f(x+y) = e^{x+y} = e^x \ e^y = f(x) \times f(y)$$

$$\therefore \ f \ is \ \hom omorphizm$$

$$\because \ f \ (R) = R^+ \subset R^* \quad \therefore \ f \ is \ not \, onto$$

اذن f **هومومورفيزم غير شامل**

(ب) إذا كانت $f : (Z_4 , \oplus) \to (Z_5^* , \otimes)$ **بحيث** $f(r) = 3^r \ \forall \ r \in Z_4$

$$\forall x \ , \ y \in Z_4 : \ f(x \oplus y) = 3^{x+y} = 3^x \ 3^y = f(x) \otimes f(y)$$

$$\therefore \ f \ is \ \hom omorphizm$$

$$\because \ f \ (x) = f \ (y) \ \Rightarrow \ 3^x = 3^y \ \Rightarrow x = y \ \therefore \ f \ is \ one \ to \ one$$

اذن f **هومومورفيزم أحادى**

$$Ker \ f = \{ \ x \ / \ f(x) = 1 \}$$
$$= \{ x \ / \ 3^x = 1 \ \}$$
$$= \{ x \ / \ x = 0 \ \}$$
$$= \ \bar{0} \ = \ 4 \ Z$$

(جـ) إذا كانت $g : (Z , +) \to (Z_3 , \oplus)$ **تشاكل زمرى بحيث** $g(m) = \overline{m} \ , \ \forall m \in Z$

$$Ker \ g = \{ \ x \ / \ g(x) = 0 \ \}$$
$$= \{ x \ / \ \bar{x} = \bar{0} \ \}$$
$$= \{ ... , -6 , -3 \ , \ 0 \ , \ 3 \ , \ 6 \ , \ ... \ \}$$
$$= \ \bar{0} \ = \ 3 \ Z$$

اجابـــــة السؤال الخامس : [عشرون درجة]

(أ) إذا كانت G_1 , G_2 زمرتان بحيث أن : $G = G_1 \times G_2$ فان G

زمرة ابدالية إذا و إذا فقط إذا كانت كل من G_1 , G_2 زمرة ابدالية

البرهان : نفرض ان G_1 , G_2 زمرتان ابداليتان

$$(\ x \ , \ y \ ) \times (\ z \ , \ w \ ) = (\ xz \ , \ yw \ ) = (\ zx \ , \ wy) = (\ z \ , \ w \ ) * (\ x \ , \ y \ )$$

اذن G ابدالية

الان نفرض العكس ان G ابدالية

$$(x, y) \times (z, w) = (z, w) * (x, y)$$
$$(xz, yw) = (zx, wy)$$
$$\therefore\ xz = zx \quad , \quad yw = wy$$

اذن G_1 , G_2 زمرتان ابداليتان

(ب) إذا كانت $G = \langle\ a , b \ /\ a^2 = b^2 = (a\,b)^2 = 1 \ \rangle$ فان :

$$A_1 = \langle a \rangle = \{ 1 , a \} \quad , \quad A_1 \Delta G$$
$$, \ A_2 = \langle b \rangle = \{ 1 , b \} \quad , \quad A_2 \Delta G$$
$$A_1 \cap A_2 = \phi \quad , \quad A_1 \otimes A_2 = \{ 1 , a , b , ab \} = G$$

انتهت الإجابة

أستاذ المادة د / السيد حامد على سيد احمد
كلية العلوم- قسم الرياضيات