كليـة : العــلوم　　　　　　　　　　　　المستوى : الثاني

قسـم : الرياضيات　　　　　　　　　　　　الماده : جبـر خطـى

الأجابه النموذجيه :

(1) نضع $\alpha\, \underline{u}_1 + \beta\, \underline{u}_2 + \gamma\, \underline{u}_3 = \underline{0}$

$$\Rightarrow \alpha\,(2, 6, 1, 4) + \beta\,(4, 0, -1, 7) + \gamma\,(0, 2, 3, 5) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (2\alpha, 6\alpha, \alpha, 4\alpha) + (4\beta, 0, -\beta, 7\beta) + (0, 2\gamma, 3\gamma, 5\gamma) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (2\alpha + 4\beta, 6\alpha + 2\gamma , \alpha - \beta + 3\gamma, 4\alpha + 7\beta + 5\gamma) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow 2\alpha + 4\beta = 0 ,\ 6\alpha + 2\gamma = 0,\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0,\ 4\alpha + 7\beta + 5\gamma = 0$$

إن حل هذه المعادلات هو $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

و هو ما يثبت أن المتجهات $\underline{u}_1 , \underline{u}_2 , \underline{u}_3$ إنما هى متجهات مستقله خطياً.

(2)

$$U = \{(x_1 , x_2 , x_3, x_4) \quad : \quad x_1 = - x_2 ,\ x_3 = x_4 \}$$

$$= \{(-x_2 , x_2 , x_3, x_3) \quad : \quad x_2 , x_3 \in \boldsymbol{R} \}$$

$$= \{(-x_2 , x_2 , 0, 0) + (0, 0, x_3, x_3) \quad : \quad x_2 , x_3 \in \boldsymbol{R} \}$$

$$= \{x_2 (1 , -1, 0, 0) + x_3 (0 , 0, 1, 1) \quad : \quad x_2 , x_3 \in \boldsymbol{R} \}$$

$$= \text{span}\{(1 , -1 , 0, 0) , (0 , 0, 1, 1)\}$$

$$= \text{span}\ \{\underline{v}_1 ,\ \underline{v}_2 \}$$

كما أن المجموعه $\{ \underline{v}_1, \underline{v}_2 \}$ مستقله خطيا لأنه بوضع

$$\alpha\, \underline{v}_1 + \beta\, \underline{v}_2 = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\,(1 , -1, 0, 0) + \beta\,(0 , 0, 1, 1) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha, -\alpha, 0, 0) + (0 , 0, \beta, \beta) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha, -\alpha, \beta, \beta) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

إذن $\{\underline{v}_1 , \underline{v}_2 \}$ أساس للفضـاء الإتجـاهى U وبالتالى $\dim U = 2$.

(3) ليكن $\boldsymbol{V}$ فضاء متجهات على حقل أعداد $\boldsymbol{F}$ و بعده n.

و ليكن $\underline{u}$ أى متجه فى $\boldsymbol{V}$ و أن $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \boldsymbol{F}$.

إذن بكتابة التعبير $\underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$

أيضـا فإنه يمكن إيجاد $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \boldsymbol{F}$

بحيث نستطيع كتابة التعبير $\underline{u} = \beta_1 \underline{v}_1 + \beta_2 \underline{v}_2 + \ldots + \beta_n \underline{v}_n$

و بالتالى فإن

$$\alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n = \beta_1\underline{v}_1 + \beta_2\underline{v}_2 + \ldots + \beta_n\underline{v}_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1\underline{v}_1 + \alpha_2\underline{v}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{v}_n - \beta_1\underline{v}_1 - \beta_2\underline{v}_2 - \ldots - \beta_n\underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1)\,\underline{v}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\,\underline{v}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\,\underline{v}_n = \underline{0}$$

و لكن المتجهـات $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ مستقله خطيـا لإنهـا اساس للفضـاء الإتجاهى $\boldsymbol{V}$.

و هو ما يؤدى إلى $(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \ldots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n$$

و بالتالى فإن المتجه $\underline{u}$ يمكن التعبير عنه بطريقة وحيدة .

(4) نفرض أن $\underline{u}, \underline{v} \in \ker T$ و أن $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$.

عندئذ يكون $T(\underline{u}) = \underline{0}$ ، $T(\underline{v}) = \underline{0}$ و من تعريف T نجد أن

$$T(\alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{v}) = \alpha\,T(\underline{u}) + \beta\,T(\underline{v}) = \alpha\,.\,\underline{0} + \beta\,.\underline{0} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{v} \in \ker T$$

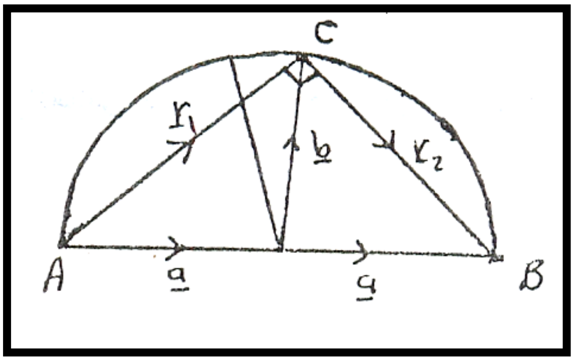
$$\Rightarrow \operatorname{Ker} T \subset\subset \boldsymbol{V}$$

ثم نفرض أن $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\underline{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \boldsymbol{R}^3$ و $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$. إذن

$$\begin{aligned}
T(\alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{v}) &= T[\alpha\,(x_1, y_1, z_1) + \beta\,(x_2, y_2, z_2)] \\
&= T[(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) + (\beta x_2, \beta y_2, \beta z_2)] \\
&= T(\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2) \\
&= (\alpha x_1 + \beta x_2 - 5\alpha y_1 - 5\beta y_2,\ 3\alpha z_1 + 3\beta z_2 + 2\alpha y_1 + 2\beta y_2, \\
&\qquad -\alpha x_1 - \beta x_2 + 6\alpha z_1 + 6\beta z_2) \\
&= (\alpha x_1 - 5\alpha y_1,\ 3\alpha z_1 + 2\alpha y_1,\ -\alpha x_1 + 6\alpha z_1) + \\
&\qquad (\beta x_2 - 5\beta y_2,\ 3\beta z_2 + 2\beta y_2,\ -\beta x_2 + 6\beta z_2) \\
&= \alpha\,(x_1 - 5y_1,\ 3z_1 + 2y_1,\ -x_1 + 6z_1) + \\
&\qquad \beta\,(x_2 - 5y_2,\ 3z_2 + 2y_2,\ -x_2 + 6z_2) \\
&= \alpha\,T(x_1, y_1, z_1) + \beta\,T(x_2, y_2, z_2) \\
&= \alpha\,T(\underline{u}) + \beta\,T(\underline{v})
\end{aligned}$$

إذن T تحويلاً خطياً.

(5) الزاوية المرسومة في نصف دائرة زاوية قائمة لأنه بأختيار المتاجهات التاليه نجد



$$\underline{r}_1 = \overrightarrow{AC} = \underline{a} + \underline{b}\,,$$

$$\underline{r}_2 = \overrightarrow{CB} = \underline{a} - \underline{b} \quad , \qquad |\underline{a}| = |\underline{b}| = a = b$$

$$\underline{r}_1 . \underline{r}_2 = (\underline{a} + \underline{b})(\underline{a} - \underline{b}) = a^2 - b^2 = 0$$

$$\text{ACB} = 90^\circ \qquad \qquad \therefore\ \underline{r}_1 \perp \underline{r}_2$$

(6) المطلوب أولاً**:**

$$\underline{a}.(\underline{b} \wedge \underline{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -12 \\ 2 & 2\mu & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6(6-2\mu) - 12(2\mu - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{5}{3}$$

المطلوب ثانياً : نضــع

$$\underline{v} = \alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{w}$$

$$6\,\underline{i} - 12\,\underline{k} = \alpha\,(\mathrm{i} + \mathrm{j} + \mathrm{k}) + \beta\,(2\,\mathrm{i} + 10/3\,\mathrm{j} + 6\mathrm{k})$$

حيث α, β قياستين وبمساواة معاملات i , j , k فى الطرفين نجد :

$$\left.\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= 6 \\ \alpha + \frac{10}{3}\beta &= 0 \\ \alpha + 6\beta &= -12 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha = 15,\ \beta = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{v} = 15\underline{u} - \frac{9}{2}\underline{w}$$

(7) لحساب المتجه العمودي على المستوى. نوجد متجهين منطبقين على المستوى هما

$$\overrightarrow{ab} = (-1, 0, 3) - (1, -3, -3) = (-2, 3\ 6)$$

$$\overrightarrow{ac} = (2, 1, 4) - (1, -3, -3) = (1, 4\ ,7)$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{ab} \times \overrightarrow{ac} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ -2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = -3\underline{i} - 20\,\underline{j} + 9\,\underline{k}$$

$$= (-3, 20, -9)$$

إذن معادلة المستوى هى

$$-3(x-1) + 20(y+3) - 9(z+3) = 0$$