جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

المستوى: الأول

يوم الامتحان: الاثنين 28 / 12 / 2015 م

المادة : رياضيات عامه (1) (100 ر)

الممتحن: د . / عصام محسن عبدالحميد عواد

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ورقة كامله

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات عامة (1) (100 ر) لطلاب المستوى الأول

(الدرجة الكلية 80 درجة)

السؤال الأول

-1 أ- أثبت صحة العلاقة التالية باستخدام مبدأ الأستنتاج الرياضى

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]$$

الحـــــــــــــــل

When n=1

$$R.H.S.=\ \frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2+1)}\right]=\frac{1}{3}=\ \frac{1}{1.3}=L.H.S.$$

نفرض صحة العلاقه عندما n=k أى أن

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2k+1)}\right]$$

نثبت صحة العلاقة عندما n=k+1

$$L.H.S.=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2k+1)}\right]+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\left[\frac{4k+6k+2}{(2k+1)(2k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)(2k+2)}{(2k+1)(2k+3)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2k+2+1-1}{(2k+3)}\right]=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2k+3)}\right]=\ R.H.S.$$

ب- أوجد الكسور الجزيئية للكسر التالى

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+3)}$$

الحـــــــــــــــل

درجة البسط أقل من درجة المقام ، والمقام عبارة عن حاصل ضرب عوامل أولية وبالتالي نفرض أن

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

يمكن إيجاد A باستخدام طريقة التغطية :

$$A=\left.\frac{x}{(x^2+3)}\right|_{x=1}=\frac{1}{4}$$

ولإيجاد B,C نضرب الطرفين في المقام ونساوي المعاملات

$$x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x-1)$$
$$=(A+B)x^2+(C-B)x+(3A-C)$$

بمساواة معاملات قوى x المختلفة نحصل على :

$$A+B=0 \quad ، \quad C-B=1 \quad ، \quad 3A-C=0$$

بالتعويض عن قيمة A وبحل المعادلات السابقة نجد أن

$$B=-1/4 \quad ، \quad C=3/4$$

وبالتالي يكون الكسر الجزئي المطلوب على الصورة

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+3)}=\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3-x}{4(x^2+3)}$$

ج- استخدم نظرية ذات الحدين لايجاد مفكوك $(2+4x)^4$.

الحـــــــــــــــل

$$(2+4x)^4=(4x)^4+4(2)(4x)^3+\frac{4\cdot 3}{2!}(2)^2(4x)^2+\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!}(2)^3(4x)^1+(2)^4$$
$$=256x^4+512x^3+384x^2+128x+16$$

السؤال الثانى

أ- أوجد حل مجموعة المعادلات التالية باستخدام طريقة كرامر أو بأى طريقة أخرى

$$5x-4y=10$$

$$4y-5z=-5$$

$$3x-2z=20$$

الحـــــــــــل

$$D=\begin{vmatrix}5 & -4 & 0\\ 0 & 4 & -5\\ 3 & 0 & -2\end{vmatrix}=5\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & -2\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}0 & -5\\ 3 & -2\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}0 & 4\\ 3 & 0\end{vmatrix}$$

$$=5(-8)+4\times 15+0=-40+60=20$$

$$D_x=\begin{vmatrix}10 & -4 & 0\\ -5 & 4 & -5\\ 20 & 0 & -2\end{vmatrix}=(10)\begin{vmatrix}4 & -5\\ 0 & -2\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}-5 & -5\\ 20 & -2\end{vmatrix}$$

$$=10(-8)+4\times 110+0=-80+440=360$$

وبالمثل نجد أن

$$D_y=\begin{vmatrix}5 & 10 & 0\\ 0 & -5 & -5\\ 3 & 20 & -2\end{vmatrix}=5(10+100)-10(15)$$

$$=5(110)-150=550-150=400$$

$$D_z=\begin{vmatrix}5 & -4 & 10\\ 0 & 4 & -5\\ 3 & 0 & 20\end{vmatrix}=5(80)+4(15)+10(-12)$$

$$=400+60-120=340$$

وباستخدام طريقة كرامر نجد أن

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{360}{20}=18$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{400}{20}=20$$

$$z=\frac{D_z}{D}=\frac{340}{20}=17$$

ب- اذا كانت $y=\sin(\ln x)+\cos(\ln x)$

أثبت أن $x^2y''+xy'+y=0$

الحـــــــــل

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x} - \frac{\sin(\ln x)}{x} = \frac{1}{x}\,(\cos(\ln x) - \sin(\ln x))$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\,(\cos(\ln x) - \sin(\ln x)) + \frac{1}{x^2}\,(-\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$$

$$= -\frac{2}{x^2}\,(\cos(\ln x))$$

$$\therefore\ x^2y'' + xy' + y = -2\cos(\ln x) + \cos(\ln x) - \sin(\ln x) + \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 0.$$

السؤال الثالث

أ- أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكلا من الدوال التالية

$(1)\ y = x^3 \sec^2 3x\,,$ $\qquad$ $(2)\ y = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1+\cos x}}$

$(3)\ y = t^2 + e^t,$ $\qquad$ $x = t\sin t$

الحـــــــــل

1) $y' = 3x^2\sec^2 3x + 6x^3\sec^2 3x\ \tan 3x$

2) $y = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1+\cos x}} = \frac{1}{2}\,(\ln(1+\sin x) - \ln(1+\cos x)$

$$\therefore y' = \frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right]$$

3) $\frac{dy}{dt} = 2t + e^t$ $\qquad$ $\frac{dx}{dt} = \sin t + t\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+e^t}{\sin t + t\cos t}$$

ب- أكتب العدد المركب $1 + i\sqrt{3}$ فى الصورة القطبية ثم أوجد قيمة $(1 + i\sqrt{3})^{18}$.

الحـــــــــــــــل

بكتابة العدد $z = 1 + i\sqrt{3}$ في الصورة القطبية نجد أن

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2 \quad , \quad \theta = \arg z = \tan^{-1}\frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

وبالتالي يكون المطلوب هو

$$z^{18} = 2^{18}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{18} = 2^{18}(\cos 6\pi + i\sin 6\pi)$$

وذلك من نظرية دي موافر

$$\therefore \quad z^{18} = 2^{18}$$

حيث أن $\sin 6\pi = 0 \quad , \quad \cos 6\pi = 1$

ج- باستخدام معكوس المصفوفة أوجد حل مجموعة المعادلات

$$2x + 3y = 6$$

$$x + 2y = 3$$

الحـــــــــــــــل

المعادلتين السابقتين يمكن كتابتها على الصورة

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

أو على الصورة

$$A \cdot X = C$$

ومنها نجد أن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \therefore |A| = 2\cdot 2 - 3 = 1 \neq 0$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك يكون $X = A^{-1} \cdot C$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{bmatrix}$$

ومن هاتين المعادلتان نجد أن $y = 2/7$, $x = 5/7$

السؤال الرابع

أ- أوجد المشتقة الأولى **لثلاثة فقط** من الدوال التالية

$(1)\ y = \tan(x^{-1}) + (\tan x)^{-1} + \tan^{-1} x$ $\qquad$ $(2)\ y = e^{\cos\sqrt{x}}$

$(3)\ y = log_a(\sin x),$ $\qquad$ $(4)\ y = \cosh(e^x) + 3^{\operatorname{csch} x}$

الحـــــــــــــل

$$(1)\ y' = \frac{-1}{x^2}\sec^2(x^{-1}) - \csc^2 x + \frac{1}{1+x^2} \qquad (2)\ y' = e^{\cos\sqrt{x}}(-\sin\sqrt{x})\ \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$(3)\ y' = \frac{\cos x}{\ln a\ \sin x}, \qquad (4)\ y' = e^x \sinh(e^x) + 3^{\operatorname{csch} x}\,(\operatorname{csch} x \coth x)\ \ln 3$$

ب- أوجد قيمة النهايات التالية مستخدما نظرية لوبيتال

$(1)\ \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2},$ $\qquad$ $(2)\ \lim_{x\to 0}[\ln(\sin x) - \ln x],$ $\qquad$ $(3)\ \lim_{x\to e}\left(\frac{\ln x - 1}{x-e}\right)$

الحـــــــــــــل

$$(1)\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x\to 3}\frac{2\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x+6}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$(1)\ \lim_{x\to 0}[\ln(\sin x) - \ln x] = \lim_{x\to 0}\ln\frac{\sin x}{x} = \ln\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \ln\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \ln 1 = 0\,.$$

$$(3)\ \lim_{x\to e}\left(\frac{\ln x - 1}{x-e}\right) = \lim_{x\to e}\frac{1}{x} = \frac{1}{e}$$

ج- أوجد الدالة العكسية **لدالة واحدة فقط** من الدالتين التاليتين

$$(1)\ \ f(x) = 2x^2 - 8x \quad , \qquad\qquad (2)\ \ f(x) = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x-3}}$$

الحـــــــــــــــل

$$(1)\ \ f(x) = 2x^2 - 8x \quad = 2(x-2)^2 - 8 = y$$

$$\therefore\ \ (x-2)^2 = \frac{y+8}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{\frac{y+8}{2}}$$

$$\mathrm{y} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad \Rightarrow \quad \cos y = \frac{1}{\sqrt{x-3}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-3} = \sec y$$

$$\therefore\ \ x = \sec^2 y \ + 3$$

انتهت الاجابه