كليـة : العلـوم | المستوى : الثانى ترم صيفى

قسم : الرياضيـات | الماده : جبـر خطـى

==

الإجابه النموزجيه :

(1) يعرف الفضاء الإتجـاهى على مجال عددى $\boldsymbol{F}$ علـى أنـه فئة $\boldsymbol{V}$ مكونـه من عناصـر ذات طبيعة اختيارية نسميها متجهات و سوف نرمز لها بالرموز $\underline{u}, \underline{v}, \ldots$ و معرف على هذه الفئة عمليتان:

توجد عملية ثنائية يرمز لها بالرمز + يوجد قانون نرمز لـها بـالرمز . بواسطته يمكن ضـرب أى متجه $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ بعدد $\alpha \in \boldsymbol{F}$ بحيث يتحقق التالى

أولاً : مسلمات الجمع

(i) $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

(ii) $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$

(iii) يوجد عنصر وحيد فى $\boldsymbol{V}$ يسمى المتجـه الصـفرى null و نرمز لـه بـالرمز $\underline{0}$. هذا العنصر يحقق لأى $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يكون $\underline{u} = \underline{u} + \underline{0}$.

(iv) لكل عنصـر $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يوجد عنصر وحيد $\underline{v} \in \boldsymbol{V}$ بحيث $\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$ يسمى العنصـر $\underline{v}$ معكوس العنصر $\underline{u}$ و يرمز له بالرمز $(-\underline{u})$.

ثانياً: مسلمات الضرب بعدد

(v) لكل $\underline{u}$ و $\underline{v}$ من $\boldsymbol{V}$ و $\alpha \in \boldsymbol{F}$ يكون

$$\alpha\,(\underline{u} + \underline{v}) = \alpha\,\underline{u} + \alpha\,\underline{v}$$

(vi) لكل $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ و α , β من $\boldsymbol{F}$ يكون

$$(\alpha + \beta)\,\underline{u} = \alpha\,\underline{u} + \beta\,\underline{u}$$

(vii) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

(viii) لكل $\underline{u} \in \boldsymbol{V}$ يكون $1\,0\underline{u} = \underline{u}$

ليكن $\boldsymbol{V}$ فضاء إتجاهى على مجال $\boldsymbol{F}$. و لتكن $\boldsymbol{S} = \{\underline{v}_1 , \underline{v}_2 , \ldots , \underline{v}_n\}$

فئة عناصرها متجهات غير صفرية فى $\boldsymbol{V}$ و $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ أعداد من $\boldsymbol{F}$.

بكتابة التعبير

(ix) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n = \underline{0}$ (1)

إذا كان تحقيق المعادله (1) يستلزم أن تكون الأعداد $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$ جميعاً مساويه للصفر. عندئذ فإن المتجهات $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 , \ldots , \underline{v}_n$ تسمى مستقلة خطياً.

و فى الحالات الأخرى أى عندما تتحقق المعادله (1) لبعض قيم $\alpha_1 , \alpha_2 , \ldots , \alpha_n$

(x) لا تساوى الصفر. عندئذ فإن المتجهات $\underline{v}_1 , \underline{v}_2 , \ldots , \underline{v}_n$ تسمى مرتبطة خطياً.

(2) يمكن بسهوله إثبات أن مجموعة المتجهات $\boldsymbol{S} = \{(x, 0) \; : \; x \in \boldsymbol{R}\}$ هى فضاء جزئى من الفضاء الإتجاهى $\boldsymbol{R}^2$

بينما المجموعه $\boldsymbol{L} = \{(x,1) \; : \; x \in \boldsymbol{R}\}$ ليست فضاء جزئى من الفضاء الإتجاهى $\boldsymbol{R}^2$.

لأنه بأخذ المتجهين $\underline{u} = (x, 1) \; , \; \underline{v} = (y, 1) \in \boldsymbol{L}$ نجد أن

$$1\underline{u} + 1\underline{v} = 1\,(x, 1) + 1\,(y, 1) = (x, 1) + (y, 1) = (x + y, 2) \notin \boldsymbol{L}$$

(3) المتجهين $\underline{V}_1 = (2, 5) \; , \; \underline{v}_2 = (-1, 1)$ مستقلين خطيا.

لأنه بوضع $\alpha\, \underline{v}_1 + \beta\, \underline{v}_2 = \underline{0}$

$$\Rightarrow \alpha\,(2, 5) + \beta\,(-1, 1) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow 2\alpha - \beta = 0 \; , \quad , \quad 5\alpha + \beta = 0$$

إن حل هذه المعادلات هو $\alpha = \beta = 0$.

و هو ما يثبت أن المتجهات $\underline{v}_1 , \underline{v}_2$ هى متجهات مستقله خطياً.

(4) المجموعه $B = \{ (1, 0) , (0, 1) \}$ ، هى أساس للفضاء الأتجاهى R^2 .

لأنه يمكن بسهوله إثبات أنه مستقله خطيا كما أنها تولد R^2

(5)

حتى يكون المتجه $\underline{w}$ تركيبه خطيه من المتجهات $\underline{u}$, $\underline{v}$

يجب أن نجد الأعداد α , β بحيث $\underline{w} = \alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v}$ أى أن

$$(1, 0, 2) = \alpha\, (1, 0, -1) + \beta\, (1, 2, -1)$$
$$= (\alpha, 0, -\alpha) + (\beta, 2\beta, -\beta)$$
$$= (\alpha + \beta\, , 2\beta\, , -\alpha - \beta)$$

وهو ما يؤدى إلى

$$\alpha + \beta = 1\ ,\ \ 2\beta = 0\ ,\ \ -\alpha - \beta = -2$$

و هى ثلاث معادلات فى مجهولين، لهما أكثر من حل فمثلا $\beta = 0$ و منها $\alpha = 1, 2$.

و بذلك يكون المتجه $\underline{w}$ ليس تركيبه خطيه من المتجهات $\underline{u}$, $\underline{v}$.

(6) نفرض أن $\underline{u} = (x_1, y_1)\ ,\ \underline{v} = (x_2, y_2) \in \boldsymbol{R}^2$ و أن $\alpha , \beta \in \boldsymbol{F}$. إذن

$$T\,(\alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v}) = T\,[\alpha\, (x_1, y_1) + \beta\, (x_2, y_2)]$$
$$= T\,[(\alpha\, x_1, \alpha\, y_1) + (\beta\, x_2, \beta\, y_2)]$$
$$= T\,(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2, \alpha\, y_1 + \beta\, y_2)$$
$$= (3\alpha\, x_1 + 3\beta\, x_2, 5\alpha\, x_1 + 5\beta\, x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2) \quad \text{من تعريف } T$$
$$= (3\alpha\, x_1, 5\alpha x_1 - \alpha y_1) + (3\beta\, x_2, 5\beta x_2 - \beta y_2)$$
$$= \alpha\, (3x_1, 5x_1 - y_1) + \beta\, (3x_2, 5y_2 - y_2)$$
$$= \alpha\, T\,(x_1, y_1) + \beta\, T\,(x_2, y_2)$$
$$= \alpha\, T\,(\underline{u}) + \beta\, T\,(\underline{v}), \quad \text{من تعريف } T$$

إذن T تحويلاً خطياً.

(7) نفرض أن $\underline{u}\ ,\ \underline{v} \in \ker T$ و أن $\alpha , \beta \in \boldsymbol{F}$.

عندئذ يكون $T\,(\underline{u}) = \underline{0}$ ، $T\,(\underline{v}) = \underline{0}$

من تعريف T نجد أن

$$T\,(\alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v}) = \alpha\, T\,(\underline{u}) + \beta\, T\,(\underline{v})$$

$= \alpha \,.\, \underline{0} + \beta \,.\underline{0}$

$= \underline{0}$

$\Rightarrow \quad \alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v} \in \ker T$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker} T \subset\subset \boldsymbol{V}$

(ii) نفرض أن $\underline{u}\backslash \,,\ \underline{v}\backslash \in \operatorname{Im} T$ وأن $\alpha \,,\, \beta \in \boldsymbol{F}$. إذن يوجد متجهين $\underline{u} \,,\ \underline{v} \in \boldsymbol{V}$

بحيث $T(\underline{u}) = \underline{u}\backslash \quad , \quad T(\underline{v}) = \underline{v}\backslash$. بالتالى فمن تعريف T نحصل على

$(\alpha\, \underline{u}\backslash + \beta\, \underline{v}\backslash\ ) = \alpha\, T(\underline{u}) + \beta\, T(\underline{v})$.

$= T(\alpha\, \underline{u} + \beta\, \underline{v})$

$\in \operatorname{Im} T.$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Im} T \subset\subset \boldsymbol{W}$