جامعة بنها- كلية العلوم قسم الرياضيات - المستوى الثالث

امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول المادة:موضوعات مختارة في الرياضيات التطبيقية 1
الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول

يدور مستوى أملس بسرعة زاويه ثابته $\underline{\omega}$ حول محور عمودي عليه يقطعه في نقطة o المحوران $o1,o2$ محوران ثابتان في المستوى ويدوران معه ، على المحور $o1$ تقع النقطة Q على بعد c من o، تتحرك على هذا المستوى نقطة مادية تحت تأثير قوة تجذبها نحو مركز الجذب المتحرك Q مقدارها $4m\omega^2\rho$ حيث m كتلة النقطة المادية ، ρ هو بعدها عن مركز الجذب 0 ، فإذا بدأت النقطة المادية حركتها من الموضع $(8c/3\,,0)$ بسرعة نسبيه مقدارها $4c\omega/3$ في الاتجاه $o2$. برهن أن النقطة المادية ترسم مساراً بالنسبه للمستوى عبارة عن دائره مركزها $(4c/3\,,0)$ ونصف قطرها $4c/3$.

السؤال الثاني

يتحرك جسم متماسك خفيف حركة دورانيه بحته حول إحدى نقطه o، إذا كانت عزوم القصور الرئيسية للجسم عند o هي $5I,3I,6I$ وبدأ الجسم حركته بسرعة زاويه $\underline{\Omega}$حول المحور المنصف للزاوية بين المحوريين $oII,oIII$ فأثبت أن

$$\omega_1 = -\frac{3\Omega}{\sqrt{10}}\tanh\left(\frac{\Omega t}{\sqrt{10}}\right) \quad , \quad \omega_2 = \omega_3 = \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\sec h\left(\frac{\Omega t}{\sqrt{10}}\right)$$

السؤال الثالث

1-إذا كانت دالة لاجرانج لمنظومة ميكانيكية هي

$$\boldsymbol{L = \frac{1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 sin^2\theta\right) - g cos\theta}$$

فأوجد دالة هاملتون ومعادلات هاملتون لها .

2-إثبت أن إذا كان

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dt}}[\mathbf{f},\mathbf{g}] = \mathbf{0}\ ,\ \text{فإن}\ \frac{\mathbf{dg}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}\ ,\ \frac{\mathbf{df}}{\mathbf{dt}} = \mathbf{0}$$

السؤال الرابع

1-أثبت أن التحويل الأتي هو تحويل تماسي ثم أوجد التحويل العكسي

$$\boldsymbol{Q = ln\left(1 + \sqrt{q}cosp\right)\ ,\ \ P = 2\left(1 + \sqrt{q}cosp\right)\sqrt{q}\ sinp}$$

2-أثبت أن متجه كمية الحركة الزاوية $\underline{\boldsymbol{M}} = \underline{\boldsymbol{r}}\wedge\underline{\boldsymbol{p}}$ لنقطة مادية حول نقطة ثابتة o يظل متجه ثابت طوال الحركة , إذا كانت النقطة المادية تتحرك تحت تأثير قوة مركزية مركزة في النقطة o ودالة الجهد لها هي V(r).

السؤال الخامس

1- عرف كل مما يأتي

كمية الحركة المعممه- متجه كمية الحركة الزاوية – الحركة الدورانيه البحته للجسم المتماسك

2- أثبت أن إذا كانت دالة هاملتون لاتعتمد صراحة على الزمن فإنها تكون ثابته.

3- أثبت أن التحويل الآتي هو تحويل قانوني

$$P = (p^2 + \omega^2 q^2)/2\omega \quad , Q = cot^{-1}(p)/\omega q$$

إنتهت الأسئلة

تمنياتي لكم بالتوفيق

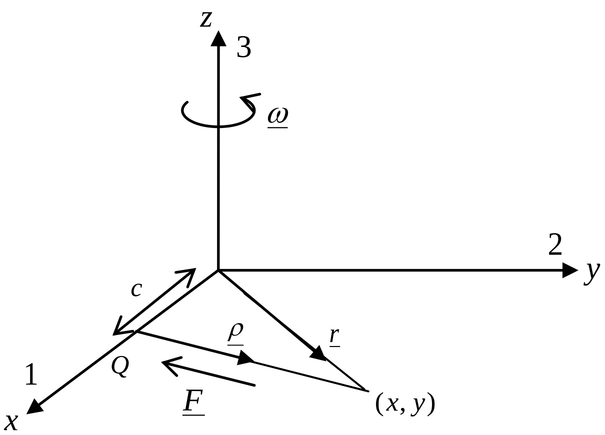
د. منى الدريني

جامعة بنها- كلية العلوم قسم الرياضيات - المستوى الثالث

<u>إجابة امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول المادة:موضوعات مختارة في الرياضيات التطبيقية 1</u>

<u>الزمن : ثلاث ساعات</u>

<u>ج1</u> (16درجه)



بإختيار نقطة تقاطع محور الدوران الثابت في الفراغ مع المستوى أي النقطة الثابتة o نقطة أصل و المحوران $o1, o2$ محوران متعامدان ومثبتان بالمستوى المحور $o3$ العمودي على المستوى هو محور الدوران المتجهات $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ هي متجهات الوحدة في اتجاه مجموعة المحاور, مجموعة محاور الاسناد السابقة هي مجموعة محاور غير قصوريه وتدور بسرعة

زاويه ثابتة $\underline{\omega}$ حيث

$$\underline{\omega} = (0,0,\omega) \qquad \text{(i)}$$

متجه موضع النقطة المادية $\underline{r}$ في اللحظة الزمنية t هو

$$\underline{r} \equiv (x, y, 0) \qquad \text{(ii)}$$

<u>معادلة حركة النقطة المادية</u>

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} \qquad \text{(1)}$$

حيث $\underline{F} = -4m\omega^2 \underline{\rho}$ وحيث أن

$$\underline{\rho} = \underline{r} - c\hat{e}_1 = (x-c)\hat{e}_1 + y\hat{e}_2$$

$$\underline{F} = 4m\omega^2\left[(c-x)\hat{e}_1 - y\hat{e}_2\right] \qquad \text{(iii)}$$

<u>متجه عجلة النقطة المادية</u>

$$\underline{a} = (\ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2 x)\hat{e}_1 + (\ddot{y} + 2\omega\dot{x} - \omega^2 y)\hat{e}_2 \qquad \text{(iv)}$$

معادلات حركة النقطة المادية

من (1) ، (iii) ، (iv) نحصل على

$$\ddot{x}-2\omega\dot{y}-\omega^2x=4\omega^2(c-x) \qquad \text{(v)}$$

$$\ddot{y}+2\omega\dot{x}-\omega^2y=-4\omega^2y \qquad \text{(vi)}$$

المعادلتين (v) ، (vi) يمكن كتابتهما على الصورة

$$D^2x-2\omega Dy+3\omega^2x=4\omega^2c \qquad (2)$$

$$D^2y+2\omega Dx+3\omega^2y=0 \qquad (3)$$

بضرب المعادلة (3) في $i=\sqrt{-1}$ والجمع مع (2) وكتابة $z=x+iy$ نحصل على المعادلة

$$D^2z+2\omega i\,Dz+3\omega^2z=4\omega^2c$$

$$(D+3\omega i)(D-\omega i)z=4\omega^2c \qquad (4)$$

الحل المتجانس للمعادلة (4)

$$(D+3\omega i)(D-\omega i)z=0$$

$$z=A\exp[-3i\omega t]+B\exp[i\omega t] \qquad (5)$$

الحل الخاص للمعادلة

$$D^2z+2\omega i\,Dz+3\omega^2z=4\omega^2c$$

هو $z=4c/3$ (6)

من (5) ، (6) يكون الحل العام للمعادلة (4) هو

$$z=A\exp[-3i\omega t]+B\exp[i\omega t]+(4c/3) \qquad (7)$$

حيث B,A هما كميتان ثابتتان تتعينان من الشروط الابتدائية للمسألة

الشروط الابتدائية :

$$\left.\begin{array}{ll} at & z\big|_{t=0}=(x+iy)\big|_{t=0}=8c/3 \\ at & \dot{z}\big|_{t=0}=(\dot{x}+i\dot{y})\big|_{t=0}=4c\omega/3 \end{array}\right] \qquad (8)$$

بإستخدام الشروط (8) والمعادلة (7) وتفاضلها بالنسبة للزمن نحصل على

$$\left.\begin{array}{l} 4c/3 = A + B \\ 4c\omega/3 = -3\omega A + B\omega \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 4c/3 \end{array}\right] \qquad (9)$$

بالتعويض من (9) في (7) نحصل على

$$\left.\begin{array}{l} 4c/3 = A + B \\ 4c\omega/3 = -3\omega A + B\omega \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 4c/3 \end{array}\right] \qquad (9)$$

بالتعويض من (9) في (7) نحصل على

$$z = x + iy = (4c/3)\exp[i\omega t] + (4c/3)$$

ومنها

$$\left.\begin{array}{ll} x - (4c/3) & = (4c/3)\cos\omega t \\ y & = (4c/3)\sin\omega t \end{array}\right] \qquad (10)$$

المعادلتان (10) هما المعادلتان البارامتريتان لدائرة مركزها بالنسبة للمحورين المثبتين في المستوى هو $(4c/3,0)$ ونصف قطرها $4c/3$.

ج2(14درجه)

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{I_1 = 5I\,, I_2 = 3I,\ I_3 = 6I}$$

بالتعويض بقيم القصور في المعادلات الثلاثة السابقة نجد أن

$$\begin{aligned} 5\dot{\omega}_1 + 3\omega_2\omega_3 &= 0 \qquad (1) \\ 3\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1 &= 0 \qquad (2) \\ 3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

بضرب المعادلة (2) في $3\omega_2$ والمعادلة (1) في ω_1 والجمع

والمعادلة (3)في ω_3 3 والمعادلة (1) ω_1 والجمع والتكامل

$$5\,\omega_1^2 + 9\omega_2^2 = c,\ \ 5\omega_1^2 + 9\omega_3^2 = c \qquad (4)$$

من الشروط الإبتدائية $\underline{\boldsymbol{\Omega}} = \left(0, \frac{\Omega}{\sqrt{2}}, \frac{\Omega}{\sqrt{2}}\right) \leftarrow c = \frac{9\Omega^2}{2} \leftarrow$

بالتعويض في (4)

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{9\Omega^2}{2} - 5\omega_1^2} \qquad (5)$$

بالتعويض في (1)

$$\dot{\omega}_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{9\Omega^2}{10} - \omega_1^2\right) = 0$$

بالتكامل وفصل المتغيرات

$$\omega_1 = \frac{-3\Omega}{\sqrt{10}} tanh\left(\frac{\Omega t}{\sqrt{10}}\right) \quad (6)$$

بالتعويض من(6) في (5)

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{\Omega}{\sqrt{2}} sech\left(\frac{\Omega t}{\sqrt{10}}\right)$$

ج3 1- دالة هاملتون (10درجه)

$$H = \sum_s p_s\, \dot{q}_s - L.$$

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_S}\ , p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = k\dot{\theta} \ \rightarrow \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{k}, \quad p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = k\dot{\varphi}sin^2\theta \ \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ksin^2\theta}$$

$$\mathrm{H} = \mathrm{gcos\theta} + \mathrm{k}(\dot{\Theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)/2$$

$$H = gcos\theta + \frac{1}{2k}(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{sin^2\theta})$$

معادلات هاملتون

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = gsin\theta - \dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta, \qquad \dot{p}_\theta = k\ddot{\theta}, \qquad (1)$$

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0, \qquad \dot{p}_\varphi = k\ddot{\varphi}sin^2\theta + 2k\dot{\theta}\dot{\varphi}sin\theta cos\theta \qquad (2)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{k} \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ksin^2\theta} \qquad (3)$$

$$\ddot{\varphi} + 2\dot{\theta}\ \dot{\varphi}\ cot\theta = 0$$ من (1)و(2)

$$k(\ \ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta) = -gsin\theta$$

2- (10درجه)

$$\frac{df}{dt} = \sum_s(\frac{\partial f}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial f}{\partial p_s}\dot{p}_s) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$= [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{dg}{dt} = [g,h] + \frac{\partial g}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}[f,g] = [[f,g],h] + \frac{\partial [f,g]}{\partial t}$$

$$= [[f,g],h] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right] \quad \textbf{(1)}$$

من متطابقة جاكوبي

$$[[f,g],h] = [f,[g,h]] + [g,[h,f]] \quad \textbf{(2)}$$

بالتعويض من(2) في(1)

$$\frac{d}{dt}[f,g] = [f,[g,h]] + [g,[h,f]] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t}\right]$$

$$= \left[f,[g,h] + \frac{\partial g}{\partial t}\right] - [[h,f],g] + \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g\right]$$

$$= \left[f,[g,h] + \frac{\partial g}{\partial t}\right] + \left[[f,h] + \frac{\partial f}{\partial t}, g\right]$$

$$= \left[f, \frac{dg}{dt}\right] + \left[\frac{df}{dt}, g\right] = 0 \rightarrow [f,g] = c$$

ج4 لكي يكون التحويل تماسي ***(10درجه)***

$$Q = \ln\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right) \;, \quad P = 2\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)\sqrt{q}\,\sin p$$

يجب ان يكون $-PdQ + pdq$ **تفاضل تام**

$$dQ = \frac{1}{\left(1 + \sqrt{q}\cos p\right)}\left(\frac{1}{2\sqrt{q}}\cos p\, dq - \sqrt{q}\sin p\, dp\right)$$

$$-PdQ + pdq = (-\sin p\cos p + p)dq + 2q\sin^2 p\, dp \quad (1)$$

لكي يكون (ا) تفاضل تام يجب أن

$$\frac{\partial(-\sin p\cos p + p)}{\partial p} = \frac{\partial 2q\sin^2 p}{\partial q}$$

$$\frac{\partial(-\sin p\cos p + p)}{\partial p} = \sin^2 p - \cos^2 p + 1 = 2\sin^2 p \quad (3)$$

$\frac{\partial(2q\sin^2 p)}{\partial q} = 2\sin^2 p \qquad (4)$ من (3) و(4) ∴التحويل تماسي

التحويل العكسي

$$e^{Q} = \left(1 + \sqrt{q}\cos p\right) \qquad \textbf{(5)}$$

$$P = 2\left(1 + \sqrt{q}cosp\right)\sqrt{q}\, sinp \qquad (6)$$

بقسمة (6) على (5)

$$\frac{P}{e^{Q}} = 2\sqrt{q}sinp \qquad (7)$$

$$e^{Q} - 1 = \sqrt{q}cosp \qquad (8)$$

بقسمة (7) و (8)

$$tanp = \frac{P}{2(e^{Q}-1)e^{Q}}$$

$$p = tan^{-1}\left(\frac{P}{2(e^{Q}-1)e^{Q}}\right)$$

$$q = \frac{(e^{Q}-1)^2}{cos^2 p} = \frac{1}{4}P^2 e^{-2Q} + (e^{Q}-1)^2$$

2-المتجه M يكون ثابت حركة إذا كانت مركباته الثلاثه ثوابت حركة وحيث أن M لايعتمد صراحة على الزمن فإن (8درجه)

$$\frac{\partial \underline{M}}{\partial t} = \frac{\partial M_x}{\partial t}\underline{i} + \frac{\partial M_y}{\partial t}\underline{j} + \frac{\partial M_z}{\partial t}\underline{k} = 0$$

المطلوب إثبات أن $[M_x,\ H] = [M_y, H] = [M_z, H] = 0$

حيث H دالة هاملتون

$$H = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V(r) \qquad (1)$$

$$p_x = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x},\ p_y = \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m\dot{y},\ p_z = \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \ (2)$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(r) \qquad (3)$$

$$\underline{M} = \underline{r} \wedge \underline{p} = \left(yp_z - zp_y\right)\underline{i} + (zp_x - xp_z)\underline{j} + \left(xp_y - yp_x\right)\underline{k} \ (4)$$

$$[M_x, H] = \sum_s \left(\frac{\partial M_x}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial M_x}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)$$

$$[M_x, H] = \frac{zy}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{yz}{r}\frac{dv}{dr} - \frac{p_y p_z}{m} + \frac{p_z p_y}{m} = 0$$

أي أن M_x *ثابت حركة* وبالمثل يمكن إثبات أن

$[M_y, H] = [M_z, H] = 0$ أي أن M_y, M_z *ثابتي حركة*.

.

ج5–

1-(3درجات)

- كمية الحركةالمعممه : هي معدل تغير طاقة الحركة بالنسبة لسرعات العموم

- ***متجه كمية الحركة الزاوية: هو متجه عزم كمية الحركة الخطية***

الحركة الدورانيه البحته للجسم المتماسك : إذا تحرك الجسم بحيث تغير جميع عناصر الجسم مواضعها ماعدا نقطة واحدة على الاقل تظل ثابتة لا تغير موضعها طوال الحركة فإنه يقال بأن الجسم يتحرك حركة دورانية بحته.

2-(4درجات)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_s \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\dot{q}_s + \frac{\partial H}{p_s}\dot{p}_s\right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

ولكن $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ **ومن معادلات هاملتون** $\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}$, $\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}$

$$\frac{dH}{dt} = \sum_s \left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s} - \frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right) = 0$$

أي أن H ثابت حركة.

3- لكي يكون التحويل الآتي تحويل قانوني (5درجات)

$$P = (p^2 + \omega^2 q^2)/2\omega \quad , Q = cot^{-1}(p)/\omega q$$

يجب أن $[Q, P] = 1$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial q} \\ \frac{\partial Q}{\partial p} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\omega p}{p^2+\omega^2 q^2} & q\omega \\ \frac{-\omega q}{p^2+\omega^2 q^2} & \frac{p}{\omega} \end{vmatrix} = 1$$

أنتهت الأسئلة

مع تمنياتي بالتوفيق

د.منى االدريني