الفرقة: المستوي الاول – كلية العلوم - الفصل الدراسي الاول ٢٠١٦-٢٠١٧م

تاريخ الامتحان: ٢٠١٧/١/١٠

نموذج اجابة ورقة كاملة

المادة: رياضيات ١ (١٠٠ر)

أسم استاذ المادة: الدكتور/ عمرو سليمان محمود

جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الأسئلة:

اجب عن الاسئلة الاتية

السؤال الاول [20] :

١) بإستخدام الإستنتاج الرياضي اثبت ان $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ لجميع قيم n الصحيحة الموجبة.

٢) اوجد الكسور الجزئية للكسر $\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$.

٣) احسب قيمة النهاية الاتية $\lim_{x\to 0}\frac{2\sinh x-2x}{x-\sin x}$

السؤال الثانى [20]:

١) اوجد جذور المعادلة $x^4-3x^3+7x^2+21x-26=0$ اذا علم ان $2+3i$ جذراً لها.

٢) اوجد مفكوك $(7+2x)^{-\frac{3}{2}}$ ومتي يكون هذا المفكوك صحيحاً

٣) اوجد المشتقة النونية للدالة $f(x)=\sin ax$.

السؤال الثالث [20]:

١) باستخدام معكوس المصفوفات أوجد حل النظام التالي

$$
\begin{aligned}
2x - y + 2z &= 2 \\
10y + x - 3z &= 5 \\
z + y - x &= -3
\end{aligned}
$$

٢) اوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالة $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x - 6}$ مع رسم توضيحي لها.

٣) اوجد y' للدالة البارمترية $y = \sin^{-1} t,\quad x = \sqrt{1-t^2}$

السؤال الرابع [20]:

١) اوجد المشتقة الاولي لكل من الدوال الاتية

$(a)\ y = \sinh^{-1}(\tan x)$ $\qquad$ $(b)\ \ln(x+y) + x^2 + 3y^3 = 1$

$(c)\ y = x \sec^4(3+7x)$ $\qquad$ $(d)\ y = (\sin x)^{3\cos x}$

٢) اوجد مفكوك ماكلورين للدالة e^{x} ومن ثم اوجد مفكوك كل من e^{-x} و $\sinh x$

الإجابة

إجابة السؤال الأول : [٢٠ درجة]

١- سوف نتبع الخطوات التالية:

- من السهل التحقق من أن العلاقة صحيحة عند $n = 1$
- نفرض أن العلاقة صحيحة عندما $n = k$ أي أن

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (1)$$

ونحاول اثبات صحة العلاقة عندما $n = k + 1$ وذلك باستخدام العلاقة (1) أى اثبات أن

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}\ ???}$$

$$1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

وهو يساوي الطرف الأيمن من العلاقة المطلوب اثبات صحتها عندما نضع $n=k+1$، أي أن العلاقة صحيحة عندما $n=k+1$ وهذا يعني أن العلاقة صحيحة لجميع قيم n الموجبة.

-٢

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$$

درجة البسط أقل من درجة المقام ، وبتحليل المقام الي حاصل ضرب عوامل أولية وبالتـالي نفرض مباشرة صورة الكســور الجزئية :

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{B}{(x+2)}$$
$$=\frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$

ومنها نحصل على

$$2x+1=A(x+2)+B(x+1)$$

وللحصول على الثوابت نســـتخدم طريقــة التعويض . ونلاحظ أنه

$$at\ \ x=-1\Rightarrow A=-1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$at\ \ x=-2\Rightarrow B=3\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

وبالتالي يكون الناتج على الصورة

$$\frac{2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{3}{(x+2)}-\frac{1}{(x+1)}$$

-٣ _لايجاد النهاية المطلوبة باجراء قاعدة لوبيتال ثلاث مرات

$$\because\ \lim_{x\to 0}\frac{2\sinh x-2x}{x-\sin x}=\frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2\sinh x-2x}{x-\sin x}&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}\\&=2\end{aligned}$$

إجابة السؤال الثانى : [٢٠ درجة]

١- حيث أن $2+3i$ جذر مركب للمعادلة $x^{4}-3x^{3}+7x^{2}+21x-26=0$ وهي ذات المعاملات المركبة فإن $2-3i$ أيضاً جذر لها . نفرض أن الجذرين الآخرين هما a,b .

باستخدام العلاقتين الأولى والأخيرة من علاقات فييتا نحصل على

$$(2+3i)+(2-3i)+a+b=-(-3)=3$$

$$\therefore a+b=-1 \qquad (1)$$

$$(2+3i)\cdot(2-3i)\cdot a\cdot b=-26$$

$$13ab=-26\Rightarrow\therefore ab=-2 \qquad (2)$$

بالتعويض عن قيمة b من المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد أن

$$a(-1-a)=-2\Rightarrow(a+2)a-1)=0$$

$\therefore a=-2$ أو $a=1$

وبالتالي $\therefore b=-2$ أو $b=1$

إذن جذور المعادلة هي

$$(2+3i),(2-3i),-2,1$$

٢-

$$(7+2x)^{-\frac{3}{2}}=(7)^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2x}{7}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{7\sqrt{7}}\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{7}x\right)+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{2!}\left(\frac{2}{7}x\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{3!}\left(\frac{2}{7}x\right)^3+\frac{(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})(-\frac{9}{2})}{4!}\left(\frac{2}{7}x\right)^4+\ldots\ldots\right]$$

$$=\frac{1}{7\sqrt{7}}\left[1-\frac{3}{7}x+\frac{15}{98}x^2-\frac{5}{98}x^3+\frac{45}{2744}x^4+\ldots\ldots\right]$$

شرط وجود المفكوك هو

$$\left|\frac{2x}{7}\right|\prec 1\Rightarrow|x|\prec\frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow-\frac{7}{2}\prec x\prec\frac{7}{2}$$

٣- لايجاد المشتقة النونية لدالة المعطاه يتم الاتي

$$\because f(x)=\sin ax$$

$$\therefore f'(x)=a\cos ax=a\sin(ax+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f''(x)=a^2\cos(ax+\frac{\pi}{2})=a^2\sin(ax+2\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow f'''(x)=a^3\cos(ax+\frac{\pi}{2})=a^3\sin(ax+3\frac{\pi}{2})$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x)=a^n\sin(ax+n\frac{\pi}{2})$$

إجابة السؤال الثالث : [٢٠ درجة]

١- لحل النظام المعطى

$$\begin{aligned}2x-y+2z&=2\\10y+x-3z&=5\\z+y-x&=-3\end{aligned}$$

يجب كتابته علي صورة مصفوفة كلاتي

$$\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&10&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\5\\-3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&2\\1&10&-3\\-1&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{46}\begin{bmatrix}13&3&-17\\2&4&8\\11&-1&21\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{46}\begin{bmatrix}13&3&-17\\2&4&8\\11&-1&21\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\5\\-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=2,\ y=0,\ z=-1$$

٢- لإيجاد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالة $f(x)=\dfrac{x}{x^2+x-6}$

- خطوط التقارب الرأسية للدالة $f(x)$ هي $x=-3\ \&x=2$:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{x}{(x+3)(x-2)}$$

$$\Rightarrow x=-3\ \&x=2$$

$$\lim_{x\to-3^+}\frac{x}{(x+3)(x-2)}=\infty=\lim_{x\to2^+}\frac{x}{(x+3)(x-2)}$$

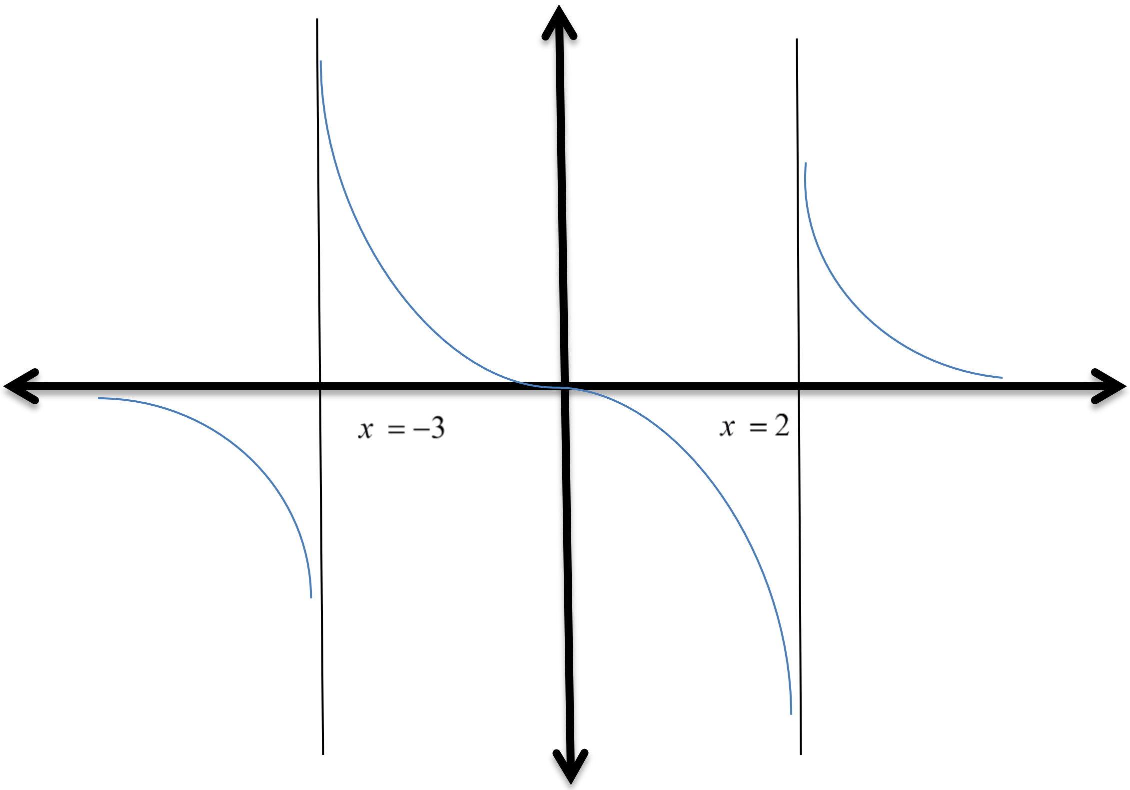
$$\lim_{x\to-3^-}\frac{x}{(x+3)(x-2)}=-\infty=\lim_{x\to2^-}\frac{x}{(x+3)(x-2)}$$

- خطوط التقارب الأفقية للدالة $f(x)$ هي $y=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(x+3)(x-2)}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(x+3)(x-2)}=0$$

- وبالتالي الرسم التوضيحي للدالة كلاتي:



٣- لايجاد y' نجري الاتي

$$y=\sin^{-1}t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$x=\sqrt{1-t^2} \Rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\times\frac{\sqrt{1-t^2}}{-t}=-\frac{1}{t}$$

إجابة السؤال الثالث : [٢٠ درجة]

١-

$$(a)\ y=\sinh^{-1}(\tan x) \Rightarrow y'=\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}=\frac{\sec^2 x}{\sqrt{\sec^2 x}}=\sec x$$

$$(b)\ \ln(x+y)+x^2+3y^3=1$$
$$\Rightarrow \frac{1+y'}{x+y}+2x+9y^2y'=0$$
$$\Rightarrow 1+y'+2x(x+y)+9y^2(x+y)y'=0$$
$$\Rightarrow \left(1+9y^2(x+y)\right)y'=-(1+2x^2+2xy)$$
$$\Rightarrow y'=-\frac{(1+2x^2+2xy)}{1+9y^2(x+y)}$$

$$(c)\ y=x\sec^4(3+7x)\ \Rightarrow y'=\sec^4(3+7x)+28x\sec^4(3+7x)\tan(3+7x)$$
$$(d)\ y=(\sin x)^{3\cos x}\ \Rightarrow \ln y=3\cos x\ln(\sin x)$$
$$\Rightarrow \frac{y'}{y}=-3\sin x\ln(\sin x)+\frac{3\cos^2 x}{\sin x}$$
$$\Rightarrow y'=y\left[-3\sin x\ln(\sin x)+\frac{3\cos^2 x}{\sin x}\right]$$
$$\Rightarrow y'=(\sin x)^{3\cos x}\left[-3\sin x\ln(\sin x)+\frac{3\cos^2 x}{\sin x}\right]$$

٢- مفكوك ماكلورين لأي دالة $f(x)$ يعطي بـ

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\frac{x^3}{3!}f'''(0)+\frac{x^4}{4!}f^{(4)}(0)+\dots\dots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\dots.$$

وبالتالي

$$\because f(x)=e^x\ \Rightarrow f(0)=1$$
$$\Rightarrow f'(x)=e^x\ \Rightarrow f'(0)=1$$
$$\Rightarrow f''(x)=e^x\ \Rightarrow f''(0)=1$$
$$\Rightarrow f'''(x)=e^x\ \Rightarrow f'''(0)=1$$
$$\vdots$$
$$\Rightarrow f^{(n)}(x)=e^x\ \Rightarrow f^{(n)}(0)=1$$
$$\therefore e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\dots\dots.$$
$$\Rightarrow e^{-x}=1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^5}{5!}+\dots\dots.$$
$$\Rightarrow \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+\dots\dots.$$

انتهت الإجابة

الدكتور / عمرو سليمان محمود

ــ جامعة بنها ــ كلية العلوم ــ قسم الرياضيات