جامعة بنـها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

الفرقة: الثانية– شعبة الفيزياء – شعبة الكيمياء

يوم الامتحان: ٩ / ١ / ٢٠١٧ م

المادة : جبر خطى واحتمالات واحصاء و التفاضل والتكامل المتقدم

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ثلث ورقة

أمتحان مادة جبر خطى واحتمالات واحصاء و التفاضل والتكامل المتقدم لطلاب الفرقه الثانيه شعبة الفيزياء

اسئلة التفاضل والتكامل المتقدم (ثلث ورقه)

اجب على الاسئله الاتية

أ) اذا كانت $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ فأثبت أن (الدرجه ٢٠)

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

ب) أوجد النهايات العظمه والصغرى للدالة (الدرجه ٣٠)

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y \ .$$

ج) أحسب التكامل (الدرجه ٢٥)

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$$

حيث المنطقه R هى ربع دائره نصف قطرها ١.

د) أختبر تقارب وتباعد المتسلسلات الاتية (الدرجه ٢٥)

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

نموذج اجابه أمتحان مادة التفاضل والتكامل المتقدم لطلاب الفرقة الثانية شعبة الفيزياء - شعبة الكيمياء

السؤال الاول

أ)

$$1)\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\frac{y}{x}\right)\right)+y\frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

$$=x\ f'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right)+y\ f'\left(\frac{y}{x}\right)\ \left(\frac{1}{x}\right)=0$$

$$=\left(\frac{-y}{x}+\frac{y}{x}\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)=0$$

ب)

$$f(x,y)=3x^2-2xy+y^2-8y\ .$$

$$f_x=6x-2y=0\implies 3x=y$$

$$f_y=-2x+2y-8=0\implies y-x=4$$

$$\therefore 3x-x=4\implies x=2\ \text{and}\ y=6$$

$$f_{xx}=6\ ,\qquad f_{yy}=2\quad \text{and}\quad f_{xy}=-2$$

$$\therefore\ f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=12-4=8>0\quad and\quad f_{xx}>0$$

إذن للدالة نهاية صغرى عند النقطة (2,6) قيمتها

$$f(2,6)=12-24+36-48=-24.$$

ج) أحسب التكامل

$$\text{Let } x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta\ \text{, then}\ \ x^2+y^2=r^2\ \text{and}\ dxdy=rdrd\theta$$

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\ dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\,e^{-r^2}\,drd\theta=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r\ e^{-r^2}\,dr=\frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$$

السؤال الثالث (٢٠ درجه)

أختبر تقارب وتباعد المتسلسلات الاتية

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

المتسلسلة هندسية تقاربية لان اساسها اقل من الواحد

$$2)\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1\neq 0$$

المتسلسلة تباعديه لأنها لا تحقق الشرط الضرورى لتقارب

$$3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \frac{1}{n},$$

$$\therefore\quad a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=a_n$$ **تناقصيه**

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$ **تحقق الشرط الضرورى**

إذن المتسلسلة تقاربية

$$4)\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

المتسلسلة تباعديه لانها هندسيه اساسها اكبر من الواحد