جامعة بنـــــــــها
كلية العلــــــــــوم
قســـم الرياضيات

الإمتحان النهائي للفصل الدراسي الأول للعام الجامعي ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م
لمقرر المعادلات التفاضليه (٢) كود (٣١٣ر)
للفرقه الثالثه علوم رياضه الزمن : ٣ساعات
ميعاد الإمتحان : ١٠ يناير ٢٠١٧م
الممتحن : ا.د/ عبدالكريم عبدالحليم سليمان استاذ ورئيس قسم الرياضيات بكلية العلوم – جامعة بنها

**أجب عن خمس أسئله فقط من الأسئله الآتيه:**

**السؤال الأول(٢٤ درجه):**

١ - إوجد الحل العام للمعادلة بطريقة تغيير الثوابت : $y''+y=\cot x$

٢ - حدد رتبة ودرجة وخاصية الخطيه لمعادلة الفروق الآتيه:

$$y_{r+3}+(r+1)y_r{}^2=e^{2r}$$

**السؤال الثاني (٢٤ درجه):**

١- إوجد الحل العام لمجموعة المعادلات ا لتفاضلية الآتية آنيا :

$$\left.\begin{aligned} x''+5x-4y&=2t \\ x+y''&=4t, \end{aligned}\right\}$$

٢- إذا كان $y=e^{-x}$ إوجد حل اللمعادلة التفاضلية

$$xy''+(x-1)y'-y=xe^{-x}$$

**السؤال الثالث(٢٤ درجه):**

١- صنف نوع كل النقاط للمعادلة التفاضلية الآتيه :

$$x^2(x^2-1)y''+(x-1)^2y'+x^2y=0$$

٢- اوجد حل المعادله التفاضليه الآتيه بطريقة متسلسلات القوي: $y''-xy=0$

**السؤال الرابع (٢٤ درجه):**

١- إوجد حل المعادلة التفاضلية $(x-1)^2y''-6(x-1)y'+12\ y=x-1$

٢- إوجد معادلة الفروق التي حلها هو $y_r=(A+rB)2^r$

**السؤال الخامس (٢٤ درجه):** إثبت أن

(i) $\Delta Ey_r=E\Delta y_r$

(ii) $\Delta=E-E^0,\qquad E=\Delta+\Delta_0,$

**السؤال السادس (٢٤ درجه):** إوجد الحل العام لمعادلات الفروق الآتيه

(i) $y_{r+2}-4y_{r+1}-5y_r=7^r$

(ii) $y_{r+1}-4^r y_r=0$ .?

---

إنتهت الأسئله مع اطيب التمنيات بالنجاح ا.د/عبدالكريم سليمان

**نموذج الإجابه للإمتحان النهائي للفصل الدراسي الأول للعام الجامعي ٢٠١٦ - ٢٠١٧ م**
**لمقرر المعادلات التفاضليه (٢) كود (٣١٣ر)**
**للفرقه الثالثه علوم رياضه** **(ورقه كامله)** **الزمن : ٣ساعات**
**التاريخ : ١٠ يناير ٢٠١٧**
**الممتحن : ا.د/ عبدالكريم عبدالحليم سليمان استاذ ورئيس قسم الرياضيات**
**بكلية العلوم – جامعة بنها**

---

**أجب عن خمس أسئله فقط من الأسئله الآتيه:**

**السؤال الأول(٢٤ درجه):**

١ - إوجد الحل العام للمعادلة بطريقة تغيير الثوابت : $y''+y=\cot x$

**أجابة ١: الحـــل :** أولا: الدالة $y_c$ من المعادلة المساعدة $\lambda^2+1=0$ نجد ان $\lambda_{1,2} = \pm i$

$$\Rightarrow \quad y_c = c_1\cos x + .c_2\sin x$$

ثانيا: الحل الخاس $y_p$ نفرض أن

$$y_p = U(x)\cos x + .V(x)\sin x$$

$$\therefore \; y'_p = U'(x)\cos x - U\sin x + .V'(x)\sin x + V\cos x$$

لكن

$$U'(x)\cos x + .V'(x)\sin x = 0 \qquad (6.19)$$

$$\Rightarrow \quad y'_p = -U\sin x + .V\cos x$$

$$\Rightarrow \quad y''_p = -U'\sin x - U\cos x + -V\sin x + .V'\cos x$$

بالتعويض فى المعادلة الأصلية نحصل على

$$-U'(x)\sin x - .V'(x)\cos x = \cot x \qquad (5.20)$$

من المعادلتين (5.19) ، (5.20) نحصل على :

$$\frac{U'}{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \cot x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{V'}{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \cot x \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}}$$

ومنها نحصل على :

$$\frac{U'}{|\sin x.\cot x|} = \frac{V'}{|\cot x.\cos x|} = \frac{1}{|\sin^2 x + \cos^2 x|}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{U'}{\cos x} = \frac{V'}{|\cot x.\cos x|} = 1$$

$$\Rightarrow \; U' = \cos x, \; V' = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x}{\sin x}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x - \sin x$$

ثم بفصل متغيرات والتكامل نجد أن :

$$\Rightarrow \; U = -\sin x + c_1 \,,\; V = \ln\,|\operatorname{cosec} x - \cot x| + \cos x + c_2$$

وبالتالى يكون الحل الخاص هو :

$$y_p = (-\sin x + c_1)\cos x + .(\ln\,|\operatorname{cosec} x - \cot x| + \cos x + c_2)\sin x$$

ويكون الحل العام هو : $\Rightarrow \quad y_c = c_1 \cos x + .c_2 \sin x$

$$y_G = y_c + y_p$$
$$= c_1 \cos x + .c_2 \sin x + (-\sin x + c_1) \cos x + .(\ln |\operatorname{cosec} x - \cot x| + \cos x + c_2) \sin x$$
$$= 2c_1(\cos x) + .2c_2(\sin x) + .\ln |\operatorname{cosec} x - \cot x|$$

---

٢ - حدد رتبة ودرجة وخاصية الخطيه لمعادلة الفروق الآتيه:

$$y_{r+3} + (r+1) y_r{}^2 = e^{2r}$$

**أجابة ٢**: الرتبه ٣ ، الدرجه ١ ، غير خطيه

---

**السؤال الثانى (٢٤ درجه):**

١- إوجد الحل العام لمجموعة المعادلات ا لتفاضلية الآتية آنيا :

$$\left.\begin{aligned} x''+5x-4y &= 2t \\ x+y'' &= 4t, \end{aligned}\right\}$$

**أجابة ١**: يمكن كتابة مجموعة المعادلات (I) على الصورة :

$$(D^2+5)x-4y = 2t \qquad (1)$$
$$x+D^2 y = 4t, \quad . \qquad (2)$$

إذن المؤثر التفاضلى العام للمجموعة هو

$$F(D) = \begin{vmatrix} D^2+5 & -4 \\ 1 & D^2 \end{vmatrix} = D^2(D^2+5)+4 = (D^4+5D^2+4)$$

إذن يوجد لدينا عدد أربع ثوابت إختيارية ،بالتأثير على المعادلة (1) بالمؤثر $D^2$

وبضرب المعادلة (2) فى 4 ثم الجمع نحصل على :

$$\left[D^2(D^2+5)+4\right]x = 4+16\ t$$

$$\therefore \left[(D^2+1)(D^2+4)\right]x = 4+16\ t$$

$$\Rightarrow \left[D^2+1\right]x = e^t \ \Rightarrow\ \lambda_{1,2} = \pm\ i\ ,\lambda_{3,4} = \pm\ 2i$$

إذن الحل المكمل $x_c$ هو :

$$x_c = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t$$

والحل الخاص هو $x_p$ :

$$x_p = \frac{1}{D^4+5D^2+4}\left(4+16.e^t\right) = 1+4t$$

إذن الحل العام $x_G$ هو :

$$x_G = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t + 1 + 4t \quad (4)$$

حيث أن $x$ هو الحل العام للمعادلة (3) ، وبالتعويض عنه فى المعادلة (1) نحصل على :

$$\left(D^2+5\right)x - 4y = 2t \;\Rightarrow\; y = \left[\left(D^2+5\right)x - 2t\right]$$

$$\Rightarrow\; y = \left[\left(D^2+5\right)x - 2t\right]$$

$$= c_1 \cos t + c_2 \sin t + \tfrac{1}{4} c_3 \cos 2t + \tfrac{1}{4} c_4 \sin 2t - \tfrac{1}{2} t^2 + 5t + \tfrac{5}{4}$$

---

٢ -إذا كان $y = e^{-x}$ إوجد حل اللمعادلة التفاضلية

$$xy'' + \left(x-1\right)y' - y = xe^{-x}$$

**<u>أجابة ٢ :</u>** نفرض أن الحل العام هو :

$$y = e^{-x}u(x) \quad , \qquad y' = -e^{-x}u(x) + e^{-x}u'(x) \quad ,$$

$$y'' = e^{-x}u(x) - 2e^{-x}u'(x) + e^{-x}u''(x) \quad ,$$

نعوض فى المعادلة (I) نحصل على :

$$e^{-x}\left[x.u''(x) + x.u - 2\cancel{x}.u'(x) + x.u' - u' - xu + u - u\right] = xe^{-x} \quad ,$$

$$\Rightarrow \quad \left[x.u''(x) - \left(1+x\right)u'\right] = xe^{-x} \quad , \qquad (II)$$

وبفرض أن $u'(x) = V(x)$ فتصبح المعادلة الأخيرة(II) كالآتى :

$$\left[x.V'(x) - \left(1+x\right)V(x)\right] = xe^{-x} \quad , \qquad (II)$$

$$\Rightarrow \quad \left[V'(x) - \frac{\left(1+x\right)}{x}.V(x)\right] = e^{-x} \quad ,$$

و هى معادلة خطية فى $V(x)$ فيها $q(x) = e^{-x}$, $p(x) = -\left(\frac{1+x}{x}\right)$ وعامل

التكامل هو

$$\mu = e^{\int pdx} dx = e^{-\ln x - x} = \frac{e^{-x}}{x}$$

والحل العام هو :

$$\mu . V(x) = \int \mu(x) q(x) dx = \int \frac{e^{-2x}}{x} dx = I = -\frac{e^{-2x}}{2x} + \frac{I}{2}$$

$$I = -2\left(\frac{e^{-2x}}{2x}\right) = \frac{e^{-2x}}{x}$$

$$\Rightarrow \quad V(x) = e^{-2x} + c_1$$

وحيث أن $u'(x) = V(x)$ بالتعويض فتصبح المعادلة الأخيرة كالآتى :

$$\Rightarrow \quad u'(x) = e^{-2x} + c_1$$

ثم بفصل متغيرات والتكامل نجد أن :

$$\Rightarrow \quad \int du = \int e^{-2x} dx + \int c_1 dx$$

$$\Rightarrow \qquad u = -\frac{e^{-2x}}{2} + c_1 x + c_2$$

ومن الفرض الأول لشكل الحل العام بالتعويض عن قيمة الدالة $u(x)$ نجد ان

$$y = e^{-x} u(x) = e^{-x}\left(-\frac{e^{-2x}}{2} + c_1 x + c_2\right),$$

وهو الحل العام للمعادلة المعطاه.

---

**السؤال الثالث(٢٤ درجه):**

١- صنف نوع كل النقاط للمعادلة التفاضلية الآتيه :

$$x^2(x^2-1)y'' + (x-1)^2 y' + x^2 y = 0$$

**أجابة ١**:

: Since $P(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2(x+1)}, \quad Q(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x+1)}$

هنا لدينا النقط x=-1, x=1,x=0 ، نبدأ عند النقطه x=-1

$$\lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x^2(x+1)} \to unbounded\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-1}{x^2(x+1)} \to unbounded\,,$$

$$and \quad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)(x+1)} \to unbounded$$

فان النقط,x=1,x=0  x=-1 تكون singular point (SP) للمعادله ونبحث نوعها من حيث

Regular singular point(RSP) or

Irregular singular point (ISP)

$$\lim_{x\to -1} (x+1)\frac{x-1}{x^2(x+1)} = -2 \to bounded\,,$$

$$and \quad \lim_{x\to -1} (x+1)^2 \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0 \to bounded$$

فان النقطه x=-1 تكون Regular singular point ( RSP )

$$\lim_{x\to 1} (x-1)\frac{x-1}{x^2(x+1)} = 0 \to bounded\,,$$

$$and \quad \lim_{x\to 1} (x-1)^2 \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0 \to bounded$$

فان النقطه x=1 Regular singular point (RSP)

$$\lim_{x\to 1} (x-0)\frac{x-1}{x^2(x+1)} = \to unbounded\,,$$

$$and \quad \lim_{x\to 1} (x-0)^2 \frac{1}{(x-1)(x+1)} = 0 \to bounded$$

فان النقطه x=0 Irregular singular point (ISP)

---

٢- اوجد حل المعادله التفاضليه الآتيه بطريقة متسلسلات القوي: $y'' - xy = 0$

**إجابة ٢:**

**نفرض ان الحل علي الصوره:**

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \Rightarrow \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}\,,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

**بالتعويض في المعادلة نحصل علي:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} = 0$$

**باجراء العمليات الجبرية علي المجموع نجد ان:**

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2}\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)c_{n-1}\, x^n = 0$$

$$2c_2 + \left[\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)c_{n+2} - (n-1)c_{n-1}\right]x^n = 0$$

**حيث ان متسلسلة القوي**

$$c_2 = 0, \quad c_{n+2} = \frac{(n-1)c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0,1,3,4,..$$

**بالصفر:xذات معاملات غير صفريه فاننا نساوي معاملات**

$$c_{n+2} = \frac{(n-1)c_{n-1}}{(n+1)(n+2)}, \quad n = 0,1,3,4,..$$

$$c_3 = \frac{c_0}{6}, \qquad c_4 = \frac{c_1}{12}, \qquad c_5 = \frac{2c_2}{20},$$

$$c_6 = \frac{3c_3}{30} = \frac{c_0}{60}, \qquad c_7 = \frac{6c_4}{42} = \frac{c_4}{84} = \frac{c_1}{84}, \ldots$$

فان متسلسلة الحل هي:

$$y = c_0 + c_1x + \frac{c_0}{6}x^3 + \frac{c_1}{12}x^4 + \frac{c_1}{10}x^5 + \frac{c_0}{60}x^6 + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{yields}} \quad y = c_0\left\{1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^6 + \cdots\right\}$$

$$+ \ c_1\{x + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{10}x^5 + \cdots\} \quad \#$$

ويمكن استخدام الصيغة التراكميه Recurrence formula من الصوره

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} = 0$$

والتي هي

$$0.c_0x^{-2} + 0.c_1x^{-1} + 2c_1 + \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)c_n\, x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n\, x^{n+1} = 0$$

بوضع في المجموع الأول n=m+3 والمجموع الثلني m=n نحصل علي متسلسله مكافئه لها تبدأ من m=0 وبالتالي نحصل علي :

$$\sum_{m=0}^{\infty} [(m+2)(m+3)c_{m+3} - c_m]x^{m+1} = 0$$

وبمساواة معاملات $x^{n+1}$ للطرفين نجد أن:

$$c_{m+3} = \frac{c_m}{(m+1)(m+2)}, \quad m = 0,1,2,3,\ldots$$

-----------------------------------------------------------------------------------------

السؤال الرابع (٢٤ درجه):

١- إوجد حل المعادلة التفاضلية $(x-1)^2 y''-6(x-1)\,y'+12\;\; y = x-1$

إجابة ١: المعادلة على صورة معادلة لاجندر حيث أن $a=1, b=-1$

نأخذ التعويض

$$(x-1)=e^{z} \;\Rightarrow\; z=\ln(x-1) \;\Rightarrow\; x=\left(e^{z}+1\right) \qquad (2.14)$$

المعادلة (المعادلة على صورة (2.13) يمكن كتابتها على الصورة

$$\left((x-1)^2 D^2-6(x-1)D+12\right)y = x-1$$

حيث أن المؤثر $\overline{D}$ هو $\overline{D}\,y=\dfrac{dy}{dz}$

$$(x-1)D=\overline{D}\,,\quad (x-1)^2 D^2=\overline{D}\left(\overline{D}-1\right) \qquad (2.15)$$

من المعادلات (2.14) ، (2.15) نعوض فى المعادلة (2.13) نحصل على :

$$\left[\overline{D}\left(\overline{D}-1\right)-6\,\overline{D}+12\right]y=(e^{z}+1)-1$$

$$\Rightarrow \left[\overline{D}^2-7\,\overline{D}+12\right]y=(e^{z})$$

$$\Rightarrow \left[\overline{D}^2-7\,\overline{D}+12\right]y \;=(e^{z}) \qquad (2.16)$$

والمعادلة المساعدة هى :

$$\lambda^2-7\lambda+12\;=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=3,\;\; \lambda_2=4$$

ويكون الحل $y_c$ هو :

$$y_c = c_1 e^{3Z} + c_2 e^{4Z} \qquad (2.17)$$

والحل الخاص $y_p$ هو :

$$y_p = \frac{1}{\overline{D}^2 - 7\overline{D} + 12} \cdot \left(e^Z\right) \qquad \Rightarrow \quad y_p = \frac{e^Z}{1-7+12} = \frac{e^Z}{6}$$

وبالتالى يكون لدينا الحل العام $y_G$ الآتى :

$$y_G = c_1 e^{4Z} + c_2 e^{3Z} + \frac{e^Z}{6}$$

وبالتعويض عن قيمة $z = \ln(x-1)$ نحصل على :

$$y_G = c_1 (x-1)^4 + c_2 (x-1)^3 + \frac{(x-1)}{6}$$

---

٢- إوجد معادلة الفروق التي حلها هو $y_r = (A+rB)^{2r}$

**إجابه ٢:**

Since the general solution

$$y_r = (A+rB)^{2r}$$

thus

$$y_{r+1} = \left[A+(r+1)B\right]^{2r+2} \qquad (2)$$

and

$$y_{r+2} = \left[A+(r+2)B\right]^{2r+4} \qquad (3)$$

Double the equation (2),and substrate the result from the equation(3),we

get $B = \frac{1}{2^{r+2}}\left(y_{r+2} - 2y_{r+1}\right)$

This implies that

$$B = \frac{1}{4.2^r}\left(y_{r+2} - 2y_{r+1}\right) \Rightarrow 4B2^{2r} = \left(y_{r+2} - 2y_{r+1}\right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\left(y_{r+2} - 2y_{r+1}\right)}{4.2^r} \qquad (4)$$

From (2),(4), we get

$$A2^r = \frac{1}{2} y_{r+1} - \frac{(r+1)}{4}\left(y_{r+2} - 2y_{r+1}\right) \qquad (5)$$

From(1),(4),(5),we get

$$y_{r+2} - 4y_{r+1} + 4y_r = 0$$

is the difference equation of order two.

---

**السؤال الخامس (٢٤ درجه):** إثبت أن

(i) $\Delta E y_r = E \Delta y_r$

Proof (i):

$$\Delta E y_r = \Delta E y_r = \Delta y_{r+1} = y_{r+2} - y_{r+1}$$

$$E \Delta y_r = E y_{r+1} - E y_r = y_{r+2} - y_{r+1}$$

Then $\Delta E y_r = E \Delta y_r$.

---

(ii) $\Delta = E - E^0, \qquad E = \Delta + \Delta_0,$

Proof (ii): Since $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r$, and $E^n y_r = y_{r+n}$, thus

$$\Delta y_r = y_{r+1} - y_r = E y_r - E^0 y_r = (E - E^0) y_r$$

Therefore $\Delta = (E - E^0)$.

Also $\Delta y_r = y_{r+1} - y_r$, thus $E = (\Delta + \Delta^0)$.

---

**السؤال السادس (٢٤ درجه):** إوجد الحل العام لمعادلات الفروق الآتيه

(i) $y_{r+2} - 4y_{r+1} - 5y_r = 7^r$

Ans .(i) Let $y_r = \lambda^r$, then

$$\lambda^{r+2} - 4\lambda^{r+1} - 5\lambda^r = 0?$$

Then

$$\lambda^r(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0$$

Thus $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -5$.Hence the homogeneous solution is

$$y_r^h = A + B(-5)^r.$$

Let $y_r^p = a7^r \Rightarrow y_{r+1}^p = a7^{r+1},\ y_{r+2}^p = a7^{r+2}$

Therefore, by substituting in(1) gives

$$y_{r+2} - 4y_{r+1} - 5y_r = 7^r$$
$$a7^{r+2} - 4a7^{r+1} - 5a7^r = 7^r$$

By comparison confidents in both sides :

$$\Rightarrow a = -\tfrac{1}{8}, \quad \Rightarrow y_r^p = -\tfrac{1}{8}\ 7^r$$

Then the general solution is

$$y_r^G = y_r^h + y_r^p = A + B(-5)^r - \tfrac{1}{8}\ 7^r$$

---

(ii) $y_{r+1} - 4^r y_r = 0$ .?

Ans.(ii) Since

$$y_{r+1} - 4^r y_r = 0, \qquad y_1 = 2,$$
$$r=1: \quad y_2 = 4y_1 \quad \Rightarrow \quad y_2 = 4y_1 = (2^2)^1 y_1,$$
$$r=2: \quad y_3 = 4^2 y_2 = 4^2.4y_1 = (2^2)^3\ y_1,$$
$$r=3: \quad y_4 = 4^3 y_3 = 4^3.4^3 y_1 = 4^6\ y_1 = (2^2)^6 y_1,$$
$$r=4: \quad y_5 = 4^4 y_4 = 4^4.4^6 y_1 = 4^{10}\ y_1 = (2^2)^{10} y_1,$$
$$r=5: \quad y_6 = 4^5 y_5 = 4^5.4^{10} y_1 = (2^2)^{15} y_1,$$

.............................

.............................

$$y_r = 4^r y_1 = 4^r.2 = (2)^{2r}.2 = (2)^{2r+1}$$

$$\text{i.e.,}\quad \left\{\begin{array}{l} y_r = (4)^{\frac{r(r-1)}{2}} y_1 = (2)^{r(r-1)} \\ or \\ y_{r+1} = (4)^{\frac{r(r+1)}{2}} y_1 = (2)^{r(r+1)} \end{array}\right.$$

---

إنتهي نموذج الإجابه　　　　مع اطيب التمنيات بالنجاح　　　　ا.د/عبدالكريم سليمان