جامعة بنها – كلية العلوم – الفصل الدراسي الأول ٢٠١٧/٢٠١٦
المستوى الرابع (تيرم تخرج) –ورقة امتحانية كاملة
إجابة اختبار مادة رياضيات ٢ (١٠٥ ر) – الزمن ساعتان

إجابة السؤال الأول

-١

$$u=\sin^{-1}x \quad , \quad dv=dx$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$du=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v=x$$
$$\therefore \int \sin^{-1}x\,dx = x\sin^{-1}x-\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=x\sin^{-1}x+\frac{1}{2}\int\frac{(-2x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$=x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+c$$

-٢

$$u=\ln x \quad , \quad dv=\frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$du=\frac{dx}{x} \qquad v=2\sqrt{x}$$
$$\therefore \int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\sqrt{x}\,dx=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+c$$

-٣ درجة البسط تساوي درجة المقام في الكسر موضوع التكامل ، لذلك يجب إجراء عملية القسمة المطولة نحصل على

$$\frac{2x^2-1}{(x-1)(x+2)}=2+\frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}$$

ثم نحلل الكسر $\frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}$ إلى كسوره الجزئية بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق نجد أن

$$\frac{-2x+3}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$$

بضرب طرفي المعادلة في المقام المشترك ومساواة البسط في كل من الطرفين ينتج أن

$$-2x+3=A(x+2)+B(x-1)$$

بوضع $x=1$ ينتج أن $A=1/3$ وبوضع $x=-2$ ينتج أن $B=-7/3$ وبالتالي يصبح التكامل على الصورة

$$\int \frac{2x^2-1}{(x-1)(x+2)}dx = \int \left[2+\frac{1/3}{x-1}-\frac{7/3}{x+2}\right]dx$$

$$= 2x + \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{7}{3}\ln(x+2) + c$$

٤-

الدالة موضوع التكامل كسرية وتحتوي الدالة المثلثية $\cos x$ ولايمكن حساب التكامل من جدول التكاملات السابق دراستها . لذلك نستخدم تعويض نصف الزاوية $u = \tan(x/2)$ فنجد أن

$$dx = \frac{2du}{1+u^2} \qquad , \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

بالتعويض في التكامل المطلوب حسابه نحصل على

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{2+\frac{1-u^2}{1+u^2}} = \int \frac{2du}{2(1+u^2)+1-u^2}$$

$$= \int \frac{2du}{3+u^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{3}} + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\tan\frac{x}{2}\right] + c$$

٥- باستخدام التعويض

$$u^2 = e^x + 1 \Rightarrow \therefore 2u\,du = e^x dx\,,\; e^x = u^2 - 1$$

$$\therefore \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2\int \frac{u(u^2-1)}{u}du = 2\left[\frac{u^3}{3} - u\right] + c$$

$$= \frac{2}{3}(e^x+1)^{3/2} - 2(e^x+1)^{1/2} + c$$

إجابة السؤال الثانى

١- بالتعويض في المعادلة (1) ينتج أن

$$(x-8)^2 + (y-15)^2 = (12)^2$$

ومنها ينتج أن

$$x^2 + y^2 - 16x - 30y - 144 = 0$$

وهي معادلة الدائرة المطلوبة .

٢- بقسمة المعادلة على 3 نحصل على

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + \frac{1}{3} = 0$$

$$\therefore f = 1 \quad , \quad g = -3/2 \quad , \quad c = 1/3$$

$\therefore$ مركز الدائرة هو $(-1,3/2)$ ونصف قطر الدائرة هو

$$r = \sqrt{f^2 + g^2 - c} = \sqrt{(-1)^2 + (3/2)^2 - (1/3)} = \sqrt{35/12}$$

٣- مركز الدائرة هو إحداثي نقطة التنصيف للمسافة AB أي أن المركز هو

$$\left(\frac{5-3}{2},\frac{-1+7}{2}\right)=(1,3)$$

ونصف قطر الدائرة هو نصف المسافة AB أي أن

$$r=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{(5+3)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{32}$$

$\therefore$ معادلة الدائرة هي

$$(x-1)^2+(y-3)^2=32$$

$$\therefore x^2+y^2-2x-6y-22=0$$

إجابة السؤال الثالث

١- معادلة القطع يمكن وضعها على الصورة $y^2=\frac{8}{3}x$

$\because$ طول الوتر البؤري العمودي يساوي معامل x

$\therefore$ طول الوتر البؤري العمودي $=\frac{8}{3}$

ومنها ينتج أن $4a=\frac{8}{3}\Rightarrow\therefore a=\frac{2}{3}$

البؤرة هي النقطة $(a,0)=(2/3,0)$

الدليل هو المستقيم $x=-a$ أي أن $x=-2/3$

٢- بإكمال المربع يمكن كتابة المعادلة على الصورة

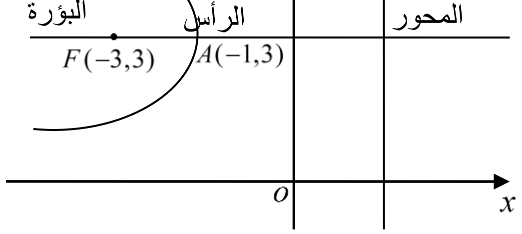
$$(y-3)^2=-8(x+1)$$

نلاحظ أن طول الوتر البؤري العمودي 8 وأن

$$a=-2$$

رأس القطع المكافئ هي النقطة $(-1,3)$ والبؤرة $(-3,3)$ ومعادلة المحور هي $y=3$

ومعادلة الدليل هي $x=1$ كما موضح في الشكل التالي



٣-من المعلومات المعطاة نستنتج أن محور القطع المكافئ رأسياً ويقع بأكمله تحت محور x فتكون معادلة القطع هي

$$x^2 = -4ay$$

البؤرة هي النقطة $(0,-a)$ ومنها ينتج أن $a = 4/3$ وعلى ذلك تكون معادلة القطع هي

$$x^2 = -(16/3)ay$$

ويكون طول الوتر البؤري العمودي $= \dfrac{16}{3}$

إجابة السؤال الرابع

١- بكتابة معادلة القطع في الصورة القياسية (بالقسمة على 100) نحصل على

$$\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{10} = 1$$

ولذلك

$$a^2 = 20 \Rightarrow \therefore a = 2\sqrt{5} \quad , \quad b^2 = 10 \Rightarrow \therefore b = \sqrt{10}$$

ومن العلاقـــة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نحصل على $e = 1/\sqrt{2}$

إذن البؤرتان هما

$$(\pm\, ae, 0) = (\pm\sqrt{10}, 0)$$

ومعادلتي الدليلين هما

$$x = \pm\frac{a}{e} = \pm 2\sqrt{10}$$

وطول الوتر البؤري العمودي يساوي

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{20}{\sqrt{20}} = 2\sqrt{5}$$

٢-بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) =$$

$$= -144 + 144 + 144$$

$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

وبالتالي يكون

$$a^2 = 36 \Rightarrow \therefore a = 6 \quad , \quad b^2 = 16 \Rightarrow \therefore b = 4$$

ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نجد أن $e = \sqrt{5}/3$ و يكون

- المركز هو النقطة $(6,-4)$
- البؤرتان هما $(6 \pm ae,-4) = (6 \pm 2\sqrt{5},-4)$
- معادلتي الدليلين هما $x = 6 \pm \dfrac{a}{e} = 6 \pm \dfrac{18}{\sqrt{5}}$
- معادلة المحور الأكبر هي $y = -4$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x = 6$ ٠
- طول الوتر البؤري العمودي = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{16}{3}$

٣- بكتابة المعادلة في الصورة القياسية وذلك بالقسمة على 144 نجد أن

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow \therefore a = 4 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow \therefore b = 3$$

$\therefore$ طول المحور القاطع = $2a = 8$

وطول المحور المرافق = $2b = 6$

من العلاقة $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ نجد أن $e = 5/4$ وبالتالي تكون

البؤرتان هما $(\pm ae,0) = (\pm 5,0)$

معادلتي الدليلين هما $x = \pm \dfrac{a}{e} = \pm \dfrac{16}{5}$

طول الوتر البؤري العمودي = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{9}{2}$

انتهت الإجابة

كلية العلوم- المستوى الرابع

(تيرم تخرج)

المادة / رياضيات ٢ (١٠٥ ر)

ورقة امتحانية كاملة

استاذ المادة/ د. عبير شعبان محمود

تاريخ الإمتحان ٢٠١٧/١/١٧

زمن الإمتحان ساعتين

درجة الإمتحان ٨٠ درجة