جامعة بنـها - كلية العلوم – قسم الرياضيات

المستوى: الثانى

يوم الامتحان: ٢٨ / ١٢ / ٢٠١٦ م

المادة : مادة التفاضل والتكامل المتقدم (٢١١ ر)

الممتحن: د . / محمد السيد أحمد حسن نصر

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ورقة كامله

أمتحان مادة التفاضل والتكامل المتقدم (٢١١ ر) لطلاب المستوى الثانى

اجب على الاسئله الاتية

السؤال الاول (٣٠ درجة)

أ) اذا كانت $z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ فأثبت أن

1) $x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

ب) اوجد المشتقات الاولى لداله

$$f(x,y) = x^{\sin y} + 3^{xy} + \tan^{-1} xy^2 + y^x$$

ج) أوجد النهايات العظمه والصغرى للدالة

$$f(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y \;.$$

السؤال الثانى (٣٠ درجه)

أ) ادرس وجود النهايات الاتيه

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

2) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy^2}{x^3+y^3}$

ب) أوجد مفكوك الدالة e^{xy} حول النقطه $(1,2)$ ثم اوجد المفكوك بدلاله قوى x, y .

ج) أحسب التكامل

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\; dxdy$$

حيث المنطقه R هى ربع دائره نصف قطرها ١ .

السؤال الثالث (٢٠ درجه)

أختبر تقارب وتباعد المتسلسلات الاتية

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^5+1}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n\pi}{5^n}\right)^n$.

أنهت الاسئله

نموذج اجابه أمتحان مادة التفاضل والتكامل المتقدم (٢١١ ر) لطلاب المستوى الثان

السؤال الاول (٣٠ درجة)

أ)

$$1)\quad x\,\frac{\partial z}{\partial x}+\ y\ \frac{\partial z}{\partial y}=x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)+y\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

$$=\ x\ \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+y\ \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=0$$

$$2)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}+\frac{-\,2xy}{(x^2+y^2)^2}=0$$

ب)

$$f_x=\sin y\, x^{\sin y-1}\ +y\,3^{xy}\ln 3+\frac{y^2}{1+x^2y^4}+\ y^x\ln x$$

$$f_y=\cos y\, x^{\sin y}\ln x\ +x\,3^{xy}\ln 3+\frac{2xy}{1+x^2y^4}+\ xy^{x-1}$$

ج)

$$f(x,y)=3x^2-2xy+\ y^2-8y\ .$$

$$f_x=6x\ -2y\ =0\ \Longrightarrow\ 3x=y$$

$$f_y=-2x+2y-8=0\ \Longrightarrow\ y-x=4$$

$$\therefore\ 3x-x\ =4\ \Longrightarrow\ x=2\ \text{ and }\ y=6$$

$$f_{xx}=6\,,\qquad f_{yy}=2\quad \text{and}\quad f_{xy}=-2$$

$$\therefore\ f_{xx}f_{yy}-(f_{xy})^2=12-4=\ 8>0\quad \text{and}\quad f_{xx}>0$$

إذن للدالة نهاية صغرى عند النقطة (2,6) قيمتها

$$f(2,6)=12-24+\ 36-48\ =\ -24.$$

السؤال الثانى (٣٠ درجه)

أ) ادرس وجود النهايات الاتيه

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m\,x^2}{x^2+m^2x^2} \quad \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$

أي أن قيمة النهاية تختلف باختلاف المسار في هذه الحالة نقول أنه لا توجد نهاية

2) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy^2}{x^3+y^3} = \frac{4}{9}$

ب) مفكوك الدالة e^{xy} حول النقطه $(1,2)$

$f(x,y) = e^{xy}$ $\qquad$ $f(1,2) = e^2$

$f_x(x,y) = ye^{xy}$ $\qquad$ $f_x(1,2) = 2e^2$

$f_y(x,y) = xe^{xy}$ $\qquad$ $f_y(1,2) = e^2$

$f_{xx}(x,y) = y^2e^{xy}$ $\qquad$ $f_{xx}(1,2) = 4e^2$

$f_{xy}(x,y) = xye^{xy} + e^{xy}$ $\qquad$ $f_{xy}(1,2) = 3e^2$

$f_{yy}(x,y) = x^2e^{xy}$ $\qquad$ $f_{yy}(1,2) = e^2$

$$\therefore\ f(x,y) = f(1,2) + (x-1)\frac{\partial f(1,2)}{\partial x} + (y-2)\frac{\partial f(1,2)}{\partial y}$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x^2} + 2(x-1)(y-2)\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial x\partial y}\right.$$
$$\left.+(y-2)^2\frac{\partial^2 f(1,2)}{\partial y^2}\right] + \cdots$$

$$\therefore e^{xy} = e^2 + (x-1)\cdot 2e^2 + (y-2)e^2 + \frac{1}{2!}\left[(x-1)^2\cdot 4e^2\right.$$
$$\left.+2(x-1)(y-2)\cdot 3e^2 + (y-2)^2 e^2\right] + \cdots$$

$$= e^2 \big[1 + 2(x-1) + (y-2) + 2(x-1)^2$$
$$+ 3(x-1)(y-2) + \frac{1}{2}(y-2)^2 + \cdots \big]$$

ولإيجاد المفكوك بدلالة x, y

$$f(0,0) = 1 \quad , \quad f_x(0,0) = 0 \quad , \quad f_y(0,0) = 0$$
$$f_{xx}(0,0) = 0 \quad , \quad f_{xy}(0,0) = 1 \quad , \quad f_{yy}(0,0) = 0 \quad , \ldots$$

$$e^{xy} = 1 + xy + \cdots$$

ج) أحسب التكامل

Let $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ **, then** $x^2 + y^2 = r^2$ **and** $dxdy = r dr d\theta$

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\, e^{-r^2}\, dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^1 r\, e^{-r^2}\, dr = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$$

السؤال الثالث (٢٠ درجه)

أختبر تقارب وتباعد المتسلسلات الاتية

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n ,$$

المتسلسلة هندسية تقاربية

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3n^5 + 1} , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$ التقاربية

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{3n^5+1} \times n^3 = \frac{1}{3} \neq 0, \infty$$

المتسلسلة تقاربية

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} ,$$

$$\therefore \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n \text{ and}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

المتسلسلة تقاربية

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(\frac{\cos n\pi}{5^n}\right)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n}\right)^n .$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{5^n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5^n} = 0 < 1$$

المتسلسلة تقاربية