جامعة بنـــــــــها
كليــــــــة العلوم
قســـم الرياضيات

التاريخ ٢٠١٧/١/١
ورقه كامله

الإختبار النهائي للفصل الأول للعام الجامعي ٢٠١٦- ٢٠١٧ م
اسم المقرر والكود : المعادلات التفاضلية العادية ٢١٤ر
المستوي الثاني شعب الزمن : ساعتان

أجب عن **أربع أسئلة فقط** من الأسئله الأتيه :

السؤال الأول (٢٠درجه): (١) حدد رتبة المعادلة التفاضلية التي حلها :

$$y = Ae^{2x} + B\,e^{-2x}$$

ثم أوجد المعادلة ؟

(ب) حل المعادلة التفاضلية الآتية : $y' = \cot(x+y)+y$

السؤال الثانى (٢٠درجه): (١) حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$Sinx.Siny\,dx + Cosx.Cosy\,dy = 0$$

٢- اذاكانت $k \in [0,2]$ فهل تحقق المعادلة الآتيه لتكون تامه ، و اذا كانت تامه أوجد الحل ؟

$$kxy.y' = x^2 + y^2$$

السؤال الثالث (٢٠درجه): حل المعادلات

1) $xy' + y = -y^2 \ln x$

2) $2x^2.y' = x^2 + y^2$

السؤال الرابع (٢٠درجه): (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 4y = 2\cos x$$

(٢) حل المعادلة التفاضلية الآتية $y'' = \sec^2 3x$

السؤال الخامس(٢٠درجه): حل المعادلات الآتية :

1) $y' + y.\tan x = \cos x$

2) $y'' + y'\tan x = \sin 2x$

مع أطيب التمنيات بالنجاح ،،،،،،،،،،،،

أ . د / عبدا لكريم سليمان

الإختبار النهائي للفصل الأول للعام الجامعي ٢٠١٦-٢٠١٧ م
اسم المقرر والكود : المعادلات التفاضلية العادية ٢١٤ر
المستوي الثاني شعب - الزمن : ساعتان
التاريخ : ٢٠١٧/١/١م الأحد - ( ) ورقه كامله
الممتحن : أ.د/عبدالكريم عبدالحليم محمد سليمان
أجب عن **أربع أسئلة فقط** من الأسئلة الأتيه :

السؤال الأول (٢٠درجه): (١) حدد رتبة المعادلة التفاضلية التي حلها :

$$y = Ae^{2x} + B\,e^{-2x}$$

ثم أوجد المعادلة ؟

الأجابه: بالتفاضل بالنسبة الى x

$$y' = 2Ae^{2x} - 2B\,e^{-2x}$$

إجراء التفاضل مره ثانية بالنسبة إلى x نحصل على
بالتفاضل بالنسبة الى x

$$y'' = 4Ae^{2x} - 4B\,e^{-2x}$$

للتخلص من الثوابت الإختياريه نطرح المعادلة (٢) من المعادلة (1) فنحصل على

$$y'' - 4y = 0$$

(ب) حل المعادلة التفاضلية الآتية : $y' = \cot(x+y) + y$

الأجابه: باستخدام التعويض

$$y = xv \quad \Rightarrow y' = xv' + v$$

فان المعادلة تصبح

$$xv' + v = \cot(1+v) + v$$

$$\therefore \quad xv' = \cot(1+v)$$

ويمكن فصل المتغيرات للمعادلة كالآتى

$$\int x\,dx = \int \frac{dv}{\cot(1+v)} + c$$

نحصل على

$$\frac{1}{2}x^2 + c = \ln\sec(v+1)$$

$$\therefore e^{(\frac{x^2}{2} + c)} = \sec(v+1)$$

$$\therefore e^{(\frac{x^2}{2} + c)} = \sec(\frac{y}{x}+1)$$

أى أن مجموعة الحل العام هى

$$y = x\left(\sec^{-1}\left(e^{\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}\right)-1\right)$$

السؤال الثانى (٢٠درجه): (١) حل المعادلة التفاضلية الآتية :

$$Sinx.Siny\ dx + Cosx.Cosy\ dy = 0$$

الأجابه: بالقسمه على $\cos x.\sin y$

$$\frac{Sinx.}{\cos x}dx + \frac{Cosy}{\sin y}dy = 0$$

بالتكامل نحصل علي

$$\ln Secx + \ln\sin y = \ln c$$

$$\sec x.\sin y = c$$

٢- اذاكانت $k \in]0,2]$ فهل تحقق المعادلة الآتيه لتكون تامه ، و اذا كانت تامه أوجد الحل ؟

$$kxy.y' = x^2 + y^2$$

الأجابه: لكي تكون المعادلة تامة لابد ان $\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

نجد ان

$$\because \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2) = 2y$$

$$\because \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}kxy = ky \quad \Rightarrow \quad k = 2 \in k$$

بالتكامل نحصل على الحل

$$xy^2 = x^3 + c$$

السؤال الثالث (٢٠درجه): حل المعادلات **1)** $xy' + y = -y^2 \ln x$

الأجابه: باستخدام التعويض

$$z = y^{-1} \quad \Rightarrow \quad z' = -y^{-2}y'$$

$$\therefore -xz' + z = \ln x \quad \Rightarrow \quad z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

و هى معادلة خطية فى z فيها

$$p(x)=-\frac{1}{x}, \qquad Q(x)=-\frac{\ln x}{x}$$

حيث عامل التكامل هو

$$\mu = e^{-\int\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x}$$

الحل العام هو

$$\frac{z}{x} = \int \frac{-\ln x}{x^2}dx = \frac{\ln x}{x} - \int \frac{d\ln x}{x} + c$$

$$= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + c$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

ثم بالتعويض عن قيمة z نحصل على

$$\frac{1}{x}y^{-1} = = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

$$y^{-1} = = \ln x + 1 + cx \quad \therefore$$

وهو الحل العام لمعادلة برنولى السابقة

2) $2x^2.y' = x^2 + y^2$

الأجابه: نجد أن المعادله متجانسه : نعوض ب $y = xu$

$$2.du = (1+u^2)dx$$

$$2\int\frac{du}{1+u^2} = \int dx + c \quad \Rightarrow \quad \ln(1+u^2) = x + c$$

$$\ln(1+\frac{y^2}{x^2}) = x + c$$

السؤال الرابع (٢٠درجه): (١) أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية :

$$y'' + 4y = 2\cos x$$

الأجابه:) أولا : نوجد الدالة المكملة y_c للجزء المتجانس

$$y'' + 4y = 0$$

المعادلة المساعدة هى

$$(\lambda^2+4) = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i) = 0$$

$$\lambda_{,21} = \pm\, 2i,$$

الحل y_c هو

$$y_c = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x \qquad (1)$$

(٢) **ثانيا :** نوجد الحل الخاص y_P (للجزء غير المتجانس) هو :

$$y_P = \frac{1}{F(D)} f(x) = \frac{1}{D^2+4}\left(x^2\right)$$

نوجد الحل الخاص

$$y_p = \left(\frac{1}{D^2+4}\right)\cos x = \left(\frac{1}{-1+4}\right)\cos x = \left(\frac{1}{-3}\right)\cos x$$

(٢) حل المعادلة التفاضلية الآتية $y'' = \sec^2 3x$

الأجابه: باستخدام التعويض $y' = p$ المعادلة تصبح

$$p' = \sec^2 3x$$

و هى معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى وحلها العام هو :

$$\therefore\ p = \int \sec^2 3x\,dx + c_1 = \frac{1}{3}\tan 3x + c_1$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{3}\tan 3x + c_1$$

$$\Rightarrow\ y = \int \left(\frac{1}{3}\tan 3x + c_1\right)dx + c_2$$

$$= \left(-\frac{1}{9}\sin 3x + c_1 x\right) + c_2 \qquad \textbf{(5.12)}$$

و هو الحل العام للمعادلة (5.11)

السؤال الخامس(٢٠درجه): حل المعادلات الآتية :

1) $y' + y.\tan x = \cos x$

الأجابه: من المعادلة المعطاه نجد ان

$$p(x) = tan\,x, \quad Q(x) = cos\,x$$

نوجد معامل التكامل

$$\mu(x) = e^{\int tan\,x\,dx} = e^{ln\ sec\,x} = sec\,x$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو:

$$sec\,x.y = \int sec\,x.cos\,x dx + c = x + c$$

$$\therefore\ y = x\,cos\,x + c\ cos\,x$$

و هو الحل العام للمعادلة وتحتوى على ثابت إختيارى واحد

2) $$y''+y'\tan x=\sin 2x$$

الأجابه: : باستخدام التعويض $y'=p$ المعادلة تصبح

$$p'+p.\tan x=\sin 2x$$

وهى معادلة تفاضلية خطيه في p فيها $p_1=\tan x,\quad q_1=\sin 2x$

عامل التكامل هو :

$$\mu = e^{\int \tan x.dx}=e^{\ln \sec x}=\sec x$$

الحل العام هو

$$x\,p=\int \sec x.2\sin x\cos x\,dx= x \quad + c$$

نحصل على

$$p=y'=\frac{-2\cos x}{x}+\frac{c}{x}$$

باستخدام التكامل بالتجزيء نحصل علي

$$dy=\frac{-2\cos x}{x}dx+\frac{cdx}{x}$$

$$y=\ln x.\sin x+c\ln x$$

وهو الحل العام

انتهت الإجابه مع أطيب التمنيات بالنجاح ،،،،،،،،،،،،،، **أ . د / عبدا لكريم سليمان**