كلية العلوم المستوى الرابع رياضيات الفصل الأول ٢٠١٧/٢٠١٦

جامعة بنها هيدروديناميكا ومرونة(١)٤٣١ر الزمن ساعتان للمادة

نموذج الأسئلة الأربعاء :٢٠١٧/١/٤

<u>أجب عن سؤالين فقط من جزء الهيدروديناميكا (الزمن ساعة لهذا الجزء)</u>

١-أ- أثبت انه فى حالة حركة مائع اذا كانت الحركة غير دورانية فانها تكون حركة جهدية والعكس صحيح .

ب- كمية من السائل تشغل حيز طوله $2l$ من أنبوبة ذات مقطع منتظم وتقع تحت تأثير قوة تتجه دائما" نحو نقطة ثابتة فى الأنبوبة وتتناسب مع البعد عن هذه النقطة أوجد الحركة الناتجة وأوجد كذلك الضغط عند أى نقطة .

....

٢-أ- أستنتج معادلات حركة سائل غير لزج (معادلات أويلر).

ب- كرة نصف قطرها a تتحرك بسرعة U فى مائع ساكن .اذا كانت الحركة غير دورانية أوجد دالة جهد السرعة وكذلك مركبات السرعة عند أى نقطة . وأثبت أن طاقة حركة المائع هى $\frac{1}{4}MU^2$ حيث M كتلة المائع المزاح .

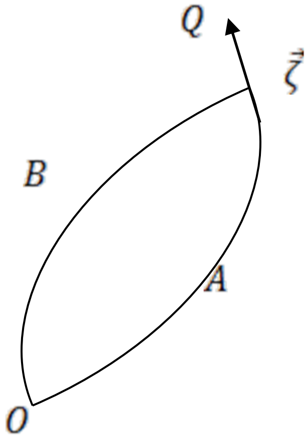
....

٣- أ- <u>اذكر بدون برهان</u> :- الشروط الحدية والأبتدائية على السطوح الصلبة – طاقة حركة مائع يتحرك حركة غير دورانية – تكامل لاجرانج – كوشى .

ب- انبوبة مستقيمة ذات مقطع منتظم على شكل زاوية قائمة ثبتت بحيث يكون أحد أضلاع الزاوية القائمة أفقيا" والأخر رأسيا" والسائل يملأ الجزء الرأسى على ارتفاع l والأفقى على بعد l من الرأسى حيث يوجد صنبور مغلق فاذا فتح الصنبور ووجد بعد زمن t أن سطح السائل فى الجزء الرأسى قد انخفض مسافة z فاثبت أن $z = l(1 - \cos \omega t)$ حيث $\omega^2 = \frac{g}{2l}$. ثم أوجد الضغط عند أى نقطة فى الأنبوبة عند هذه اللحظة.

....

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق .ا.د/محمود عبد العاطى



نموذج الأجابة

اجابة السؤال الأول

أ- نفرض O نقطة ثابتة ، P أي نقطة من نقط الجزء الذي فيه الحركة للسائل غير دوامية (غيردورانية)
سوف نوصل النقطة P بالنقطة O بالمنحنيين OBP,OAP و كل منهم يقع أيضا في جزء السائل الذي فيه الحركة غير دوامية .
سنطبق نظرية ستوكس على المنحنى المغلق $OAPBO$ فيكون

$$\Gamma_{OAPBO} = \int_{OAPBO} \vec{q}.d\vec{S} = \int_{S} \vec{n}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{q}\right) dS \qquad (1)$$

حيث S أى سطح يمكن إنشاؤه على المنحنى $OAPBO$ بحيث يقع كله في جزء السائل الذي فيه الحركة غير دوامية و بما ان الحركة غير دوامية فيكون متجه الدوامية يساوي الصفر

$$\therefore \vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = cur\ell\vec{q} = \vec{o} \qquad (2)$$

بذلك نستنتج أنه من (1)
إذا كانت الحركة غير دوامية فيكون اللف Γ حول أى منحنى مغلق موجود داخل السائل يساوى صفر.
و لكن من (1)

$$\int_{OAPBO} \vec{q}.d\vec{S} = \int_{OAP} \vec{q}.d\vec{S} + \int_{PBO} \vec{q}.d\vec{S} = o$$

$$\therefore \int_{OAP} \vec{q}.d\vec{S} = -\int_{PBO} \vec{q}.d\vec{S}$$

$$= \int_{OBP} \vec{q}.d\vec{S} = -\phi_P say \qquad (3)$$

حيث ϕ_P أى داله قياسية التي قيمتها تعتمد فقط على موضع النقطة P (و موضع النقطة الثابتة O أيضا) و لكن لا تعتمد على أختيار الطريق من O الى P.
نختار نقطة أخرى Q قريبة جدا من P حيث انه يمكن اعتبار أن متجه السرعة $\vec{q}$ ثابت في إتجاه PQ و لنفرض أن ζ هو متجه موضع Q بالنسبة الى P ففي هذه الحالة يمكن كتابة العلاقة التقريبية الاتية:

$$\vec{q}.\vec{\zeta} = \int_{PQ} \vec{q}.d\vec{S} = -\phi_Q + \phi_P \qquad (4)$$

لأن التكامل من P الى Q يساوي التكامل من O الى Q مطروحا منه التكامل من O الى P و من (3) ينتج العلاقة (4) .

و لكن من العلاقة التقريبية

$$\phi_Q = \phi_P + \left(\vec{\zeta}.\vec{\nabla}\right)\phi_P \qquad (5)$$

و بالتعويض من (4),(5) ينتج أن

$$-\left(\vec{\zeta}.\vec{q}\right) = \left(\vec{\zeta}.\vec{\nabla}\right)\phi$$

حيث أننا وضعنا $\phi = \phi_P$ لأن P أى نقطة اختيارية عامة .

و لكن هذه العلاقة صحيحة مهما كانت قيمة المتجه الصغير $\vec{\zeta}$. بذلك نستنتج أن

$$\vec{q} = -\vec{\nabla}\varphi = -grad\,\varphi \qquad (6)$$

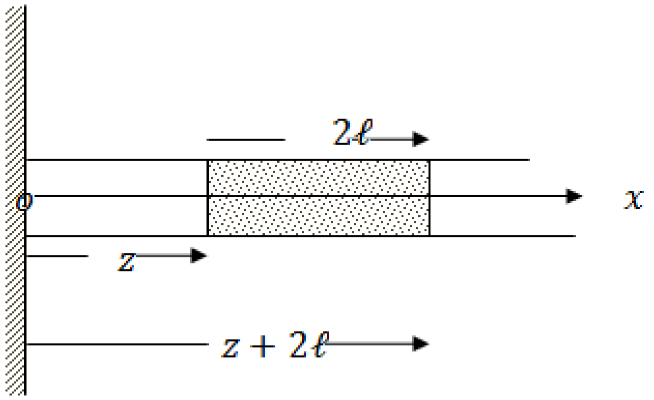
φ تسمى بداله جهد السرعة . بذلك نستنتج أنه " حيث تكون الحركة غير دورانية فإن الحركة جهدية أى يمكن وضع متجه السرعة على صورة إنحدار لداله قياسية ϕ " و العكس صحيح أى:

" اذا كانت الحركة جهدية أى أن السرعة جهدية أى يمكن وضعها على صورة $\vec{q} = -grad\,\varphi$ فإن حركة السائل تكون غير دوامية أو غير دورانية .

لأن

$$\begin{aligned}\vec{w} = cur\ell\,\vec{q} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = -\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\varphi\right) \\ &= -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi = \vec{o}\end{aligned}$$

ب- نفرض أن z هو بعد النقطة الثابتة عن الطرف الحر القريب من السائل



و ان سرعه السائل عند أى نقطة على

بعد x من o هو u فتكون القوى الخارجية المؤثرة لوحدة الأطوال (لأن وحدة الاطوال تتناسب مع وحدة الحجوم) هو μx و تتجه الى النقطة o
و حيث ان الانبوبة رقيقة فإن الحركة تكون تقريبا على بعد واحد

لدراسة الحركة معادلة الاتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}.(\rho\vec{q}) = o$$

ρ ثابته

$$\vec{\nabla}.\vec{q} = o$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o$$

و لكن مركبات السرعة $\vec{q}$ هي

$$(u, o, o)$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = o \qquad (1)$$

معادلة الحركة لاويلر تأخذ الصورة

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

لان الحركة في إتجاه محور x فقط

$$F \alpha x \qquad \therefore F_x = -\mu x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (2)$$

و من معادلة الأتصال $\frac{\partial u}{\partial x} = o$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

و حيث أن u داله في الزمن فقط لأن تفاضلها بالنسبة الى x يتلاشى بإجراء تكامل المعادلة السابقة بالنسبة الى x

$$\therefore x\frac{du}{dt} = -\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2}\mu x^2 + A$$

حيث A ثابت التكامل

عندما $x = z$ فإن $p = p_o$

$$z\frac{du}{dt} = -\frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2}\mu z^2 + A$$

عندما $x = z + 2\ell$ فإن $p = p_o$

$$(z + 2\ell)\frac{du}{dt} = -\frac{p_o}{\rho} - \frac{1}{2}\mu(z + 2\ell)^2 + A$$

من هذين الشرطين بالطرح

$$\therefore \frac{du}{dt} = -\mu(z + \ell) \qquad (3)$$

و حيث أن سرعة تدفق السائل

$$u = \frac{dz}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2z}{dt^2} = -\mu(z + \ell) \qquad (4)$$

بالتكامل مرتين بالنسبة الى t نحصل على

$$(z + \ell) = \beta\cos\left(\sqrt{\mu}t + \alpha\right) \qquad (5)$$

و يعني هذا ان السائل داخل الانبوبة يتحرك ح.ت.ب $\alpha, \beta,$ ثوابت تتعين من الشروط الإبتدائية للحركة، كما يمكن حساب الضغط عند أى نقطة من معادله اويلر

$$\frac{du}{dt} = -\mu x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad (6)$$

و بالتكامل بالنسبة الى x وبإستخدام المعادلة (3)

$$\therefore -\mu(z+\ell)x = -\frac{1}{\rho}p - \frac{1}{2}\mu x^2 + A \qquad (7)$$

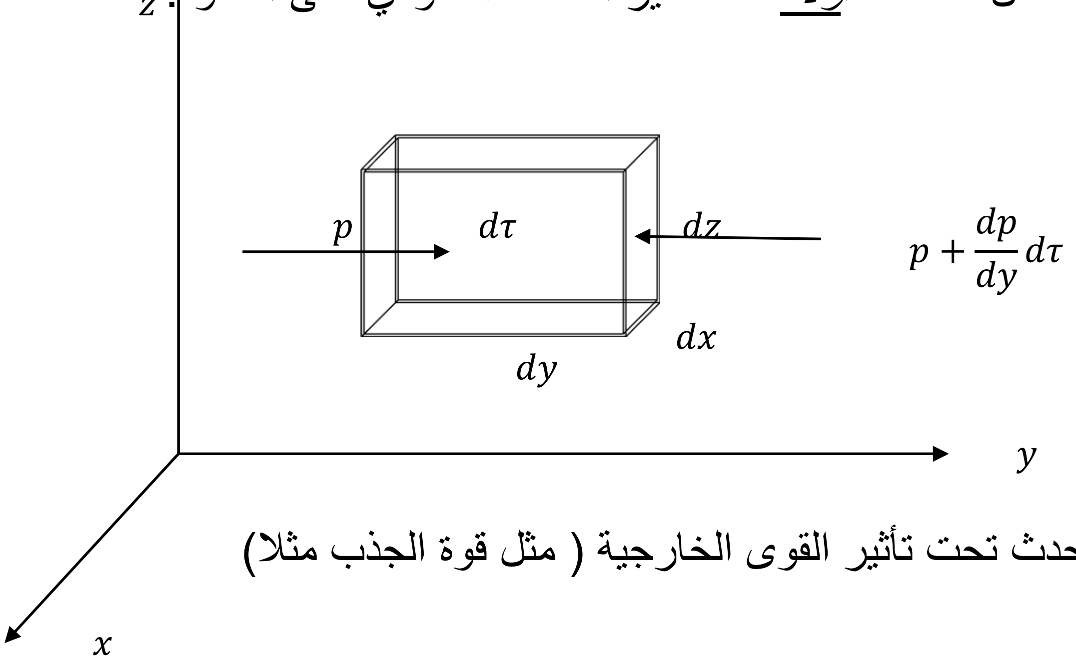
حيث A ثابت   و بالتعويض عن A نحصل على

$$\frac{p-p_o}{\rho} = \frac{1}{2}\mu(z-x)(x-z-2\ell) \qquad (8)$$

اجابة السؤال الثانى

أ- معادلة حركة سائل غير لزج (معادلات أويلر)

نعتبر سائل يشتغل عند الزمن t حيز محدود بواسطة سطح مقفل ثابت s .
و طبقا لقانون نيوتن الثاني للحركة فإن القوى الكلية المؤثرة على كتلة السائل تساوى معدل التغير في كمية الحركة .
حركة السائل ستحدث أولا تحت تأثير الضغط العمودي على الحدود.



ثانيا: تحدث تحت تأثير القوى الخارجية (مثل قوة الجذب مثلا)

و لنفرض ان القوى الخارجية التي تؤثر على وحدة الكتل من السائل هي $\vec{F}$.

فإذا فرضنا عنصر من السائل على هيئة متوازي مستطيلات حجمه $d\tau$ و اضلاعه توازي المحاور و ذلك بإستخدام أحداثيات كرتيزية متعامدة فنجد ان لهذا العنصر الابعاد dx, dy, dz و يكون بذلك

$$d\tau = dxdydz$$

بذلك نجد ان القوى الخارجية المؤثر على هذا العنصرهي $(\rho d\tau)F$ لأن كتلته هي $(\rho d\tau)$.

يؤثر أيضا على هذا العنصر قوى داخلية نتيجة لضغط بقية السائل عليه. فإذا أخذنا أحد اوجه هذا العنصر و الوجه المقابل له و ليكن هم الوجهين الموازيين للمستوى (oxz) فإذا كانت p هي الضغط على الوجه الاول (عمودية عليه لانها قوى الضغط) فيكون الضغط على الوجه المقابل الذي سيبعد عنه بمسافة dy هو $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right)$ و هاتين القوتين تؤثران في اتجاه محور y و بذلك تكون محصلة الضغوط في إتجاه محور y هو $-\frac{\partial p}{\partial y} d\tau$ و هذه القوة قوة ضغط اى قوة لوحدة المساحات فتكون محصلة الضغوط في اتجاه محور y المؤثر على العنصر $d\tau$ هي $\left(-\frac{\partial p}{\partial y} dy\right) dxdz$ اى تساوى $-\frac{\partial p}{\partial y} d\tau$ كذلك بالمثل في اتجاه باقي المحاور . و على ذلك نجد ان القوى المؤثرة على العنصر $d\tau$ الناتجه عن قوة الضغط هي

$$-\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\right) d\tau = -\nabla p d\tau$$

و على ذلك يمكن كتابة معادلة حركة العنصر $d\tau$ و ذلك يتطبيق قانون نيوتن الثاني فيكون

$$(\rho d\tau) \frac{d\vec{q}}{dt} = (\rho d\tau)\vec{F} - (\vec{\nabla} p) d\tau$$

و بما أن $d\tau$ عنصر إختياري فيكون

$$\frac{d\vec{q}}{dt}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad (1)$$

و هي معادلة حركة السائل .

و بالتعويض عن الطرف الأيسر بدلالة العجلة المعطاه الأتجاهيه سابقا نحصل على

$$\frac{d\overline{q}}{dt}=\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}q^2-\vec{q}\wedge\vec{w}=F-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+(\vec{q}.\vec{\nabla})\vec{q}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad \rightarrow (3)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على صورة ٣ معادلات قياسية و ذلك بإستخدام الأحداثيات الكارتيزية أى

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (4)$$

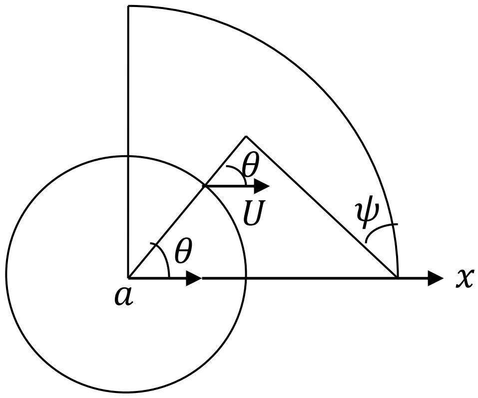
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

و على ذلك نكون قد حصلنا لأى سائل يتحرك على القوانين الأتية

١- معادلة الأتصال

٢- ٣ معادلات للحركة و هي تعطى من المعادلات (4)

و على ذلك فإننا نحصل على أربع معادلات في المجاهيل ρ الكثافة ، p الضغط، $\vec{q}$ السرعة التى لها ٣ مركبات



ب-الحل

أيضا نأخذ محور x في إتجاه السرعة U

الحركة متماثلة حول هذا المحور .

بإستخدام الاحداثيات الكروية r,θ,ψ

φ لا تعتمد على ψ . و لكن تعتمد على r,θ,t . إذا كانت U تعتمد على t و حيث أن الحركة منتظمة

$\therefore$ φ تعتمد على r,θ فقط

$\therefore$ هي تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2\varphi = o$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{r\sin\theta}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = o$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = o \qquad (1)$$

و الشروط الحدية

$$\varphi \to o \qquad as \quad r \to \infty \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial r} = U\cos\theta \qquad on \quad r = a \qquad (3)$$

بفرض أن φ على الصورة

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right)\cos\theta$$

و هذا ينتج أيضا ناتج من المعادلة (1) بنفس الطريقة السابقة و بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$(2) \Longrightarrow A = o$$

$$(3) \Longrightarrow \frac{2B\cos\theta}{a^3} = U\cos\theta \qquad\qquad i.e. \quad B = \frac{Ua^3}{2}$$

$$\therefore\ \varphi = \frac{Ua^3}{2r^2}\cos\theta$$

و هذا هو جهد السرعة .

سرعة المائع عند اى نقطة تعطى بالمعادلة

$$\underline{q} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$q_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = +U\frac{a^3}{r^3}\cos\theta$$

$$q_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = +U\frac{a^3}{2r^3}\sin\theta$$

$$q_\psi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = o$$

في هذه الحالة للحصول على طاقة حركة المائع

$$K.E = \frac{1}{2}\rho\int_{r=a}\varphi x - \frac{\partial\varphi}{\partial r}\,ds$$

$$= \frac{1}{2}\rho\int\frac{Ua\cos\theta}{2}xU\cos\theta\,ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a\int cos^2\theta ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{\theta=o}^{\pi} \int_{\tau=o}^{2\pi} cos^2\theta . a^2 \sin\theta \, d\theta d\psi$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{o}^{\pi} cos^2\theta . 2\pi a^2 \sin\theta \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\rho U^2 a^3 \pi . \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi a^2 \rho\right) U^2$$

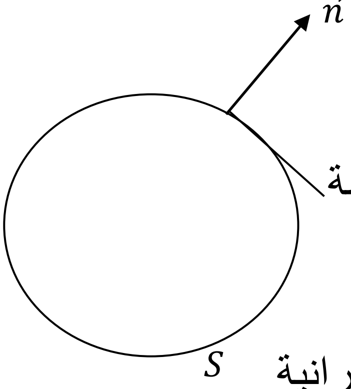
$$= \frac{1}{4} M U^2$$

حيث M هي كتلة السائل المزاح

<u>اجابة السؤال الثالث</u>

<u>الشروط الحدية على السطوح الصلبة</u>

أ- لا يوجد إنسياب للمائع خلال السطوح الصلبة أى لا يمكن للسائل أن يخترق السطوح الصلبة و الذي يوجد بداخله المائع.



∴ مركبة سرعة المائع العمودية على السطح s عند أى نقطة

تساوى مركبة السرعة العمودية للسطح الصلب s عند هذه النقطة.

$$\underline{q_s} . \underline{\mathrm{n}} = \underline{\mathrm{q}} . \underline{\mathrm{n}}$$

$\underline{n}$ متجه الوحدة العمودي على s . إذا كانت حركة المائع غير دورانية

$$\therefore \underline{q} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\therefore -\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \underline{q_s} . \underline{n}$$

ب- إذا كان المائع الحقيقي (غير مثالى). المركبة المماسية لسرعة المائع و سرعة السطوح الصلبة تكون واحدة عند أى نقطة من السطح

نظرا للزوجة. و في حالة عدم تحرك السطح الصلب أى تكون سرعته تساوى صفر تكون سرعة المائع المماسية مساوية للصفرو يسمى هذا الشرط بشرط عدم الإنزلاق

ج- إذا كان المائع مثالى فإن مركبة السرعة المماسية للمائع تختلف عن سرعة السطح الصلب و يمكن تعيين السرعة المماسية للمائع بحل المسألة. و في هذه الحاله يتوافر شرط الإنزلاق لا يوجد أى شروط بالنسبة للقابلية للإنضغاط في حالة الموائع المثالية .

الشروط الإبتدائية

- إذا كان المائع ساكنا في المالانهاية ∞

$$\therefore \underline{q} \to \mathrm{o} \qquad \mathrm{as} \qquad \mathrm{r} \to \infty$$

- إذا كان يتحرك بسرعة U في اتجاه محور x

$$\therefore q_x \to U \qquad q_y \to o \qquad , q_z \to o \qquad as \quad r \to \infty$$

$$\therefore \varphi \to -Ux$$

في حالة حركة المائع غير دورانية أى أنها حركة ذات جهد

$$\therefore \varphi - (-Ur\cos\theta) \to o = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$as \quad \frac{1}{r} \qquad as \quad r \to \infty$$

في حالة المائع ساكن

$$\varphi \to o \qquad as \quad \frac{1}{r} \qquad as \;\; r \to \infty$$

$$= O\left(\frac{1}{r}\right)$$

إذا كان اللف مساويا للصفر حول اى منحنى مغلق و لا يوجد اى منبع أو مصب خطي، حينئذ

$$\varphi \to o \qquad as \;\; \frac{1}{r} \qquad as \;\; r \to \infty$$

$$\varphi + \mathrm{Ur}\cos\theta = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)$$

طاقة الحركة لمائع يتحرك حركة غير دورانية

$$\therefore K.E \ of \ all \ fluid = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

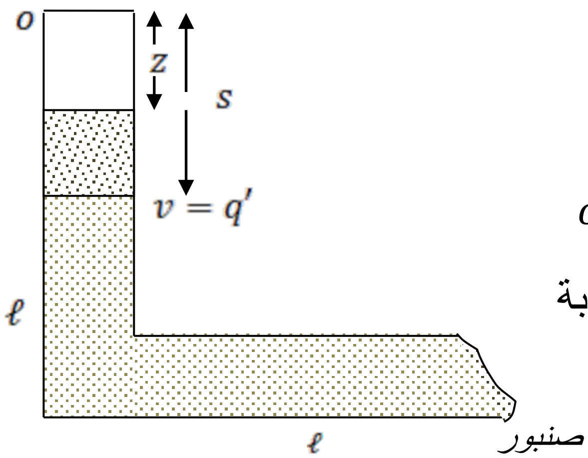
حيث ρ كثافة المائع ، φ دالة جهد السرعة ، n المتجه العمودى على السطح s .

تكامل لاجرانج- كوشى

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\Omega+p=const.=c(t)$$

تسمى تكامل لاجرانج - كوشى .حيث q السرعةΩ طاقة الوضع ، P الضغط.

φ دالة جهد السرعة،t الزمن.



ب-الحل

نفرض أن s بعد أى نقطة في السائل عند o

و أن q' سرعة اى نقطة A في إتجاه الأنبوبة

من معادلة الاتصال $\vec{\nabla}.\vec{q}=o$

$$\therefore \frac{\partial q'}{\partial s}=o \qquad (1)$$

$\overline{q}$ ليست لها سوى مركبة رأسية واحدة بالنسبة الجزء الرأسي و تمثل (1) معادلة الإتصال .

أى ان q' لا تعتمد على s $\left(\frac{\partial q'}{\partial s}=o\right)$ و هي بالتالى تساوى سرعه هبوط السائل

$$q'=z' \qquad (2)$$

و لكن الحركة غير دورانية $\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{q}=o\right)$ و بإدخال جهد السرعة $\phi\left(\vec{q}=-\vec{\nabla}\phi\right)$ أى أن $q'=-\frac{\partial\phi}{\partial s}$ و بالتكامل بالنسبة الى s

$$\therefore \phi = -q'.s + \cos t \qquad (3)$$

من معادلة برنولى

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}q^2 + \Omega - \frac{\partial \phi}{\partial t} = const. \qquad (4)$$

و لكن

$$q = q' = \dot{z} = -\frac{\partial \phi}{\partial s}$$

$$\therefore \frac{1}{2}z^{-2} + s\ddot{z} + \Omega + \frac{p}{\rho} = const. \qquad (5)$$

إذا كانت النقط A في الجزء الرأسي من الأنبوبة فإن

داله جهد الموضع $\quad \Omega = -g.s$

البعد الرأسي عن نقطة ثابتة $\qquad$ عجلة الجاذبية

أما إذا كانت في الجزء الأفقى من الأنبوبة

داله الجهد الموضع $\quad \Omega = -gy$

البعد الرأس من نقطة ثابتة $\qquad$ عجلة الجاذبية

من (5) نجد أن .... الضغط الجوى عند السطح الحر $p = p_o$

$$s = z \qquad , \qquad s = z + 2\ell$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}z^{\cdot 2} + z\ddot{z} - gz + \frac{p_o}{\rho} = const \\ &\frac{1}{2}z^{\cdot 2} + (z + 2\ell)\ddot{z} - g\ell + \frac{p_o}{\rho} = const \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

و بالطرح نجد أن

$$\ddot{z} = -\frac{g}{2\ell}(z - \ell)$$

$$\therefore \ddot{z} = -\left(\frac{g}{2\ell}\right) z + const \qquad (7)$$

و على ذلك تكون الحركة هي ح،ت،ب، زمنها الدوري

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

$$\therefore (z-\ell) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\,t + \alpha\right) \qquad (8)$$

تعيين الثوابت A, α عندما $t = o$ فإن

$$z = o \qquad , \quad z^{\cdot} = o$$

$$\therefore A = -\ell \qquad , \quad \alpha = o$$

$$z = \ell\left[1 - \cos\sqrt{\frac{g}{2\ell}}\,t\right] \qquad (9)$$

لإيجاد الضغط عند أى لحظة نوجد أولا الثابت في المعادلة (6) ثم نعوض في المعادلة (4).

انتهت الأجابة

ا.د.محمود عبد العاطى محمود