كلية العلوم		المستوى الثانى رياضيات وحاسب		الفصل الأول ٢٠١٧/٢٠١٦
جامعة بنها		ميكانيكا نيوتن ٢٣١ ر		الزمن ساعتان
		نموذج الأسئلة		الأحد: ٢٠١٧/١/١

أجب عن أربعة أسئلة فقط مما يلى (الدرجة الكلية ٨٠ درجة موزعة بالتساوى)

١-أ- تتعين الأزاحة لجسيم يتحرك على خط مستقيم بالعلاقة

$x = 6\cos\frac{5}{2}t + 8\sin\frac{5}{2}t$ حيث الزمن بالثانية والمسافة بالقدم . أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وعين زمنها الدورى وسعتها وزاوية الطور الأبتدائية وأكبر قيمة للسرعة والعجلة. (١٠ درجات)

ب- تتحرك نقطةمادية فى مستوى وكانت مركبات سرعتها بالنسبة للمحورين ox, oy اللذان يدوران بسرعة زاوية ثابتة ω هى $\frac{4}{5}\omega y, \frac{4}{5}\omega x$ على الترتيب .أثبت أن مسار هذه النقطة قطع ناقص والزمن الدورى $10\pi/3\omega$. (١٠ درجات)

....

٢- أ- استنتج مركز ثقل نصف كرة مصمتة نصف قطرها a . (٧ درجات)

ب- أطلقت قذيفة الى أعلى مستوى يميل عل الأفقى بزاوية β فى اتجاه يصنع زاوية $\alpha + \beta$ على الأفقى ،فاذا علم أن القذيفة تصيب هذا المستوى فى الأتجاه الأفقى . أثبت $\tan\alpha = \sin 2\beta / 2(1 + \sin^2\beta)$. (١٣ درجة)

....

٣-أ- أوجد مركز ثقل مخروط أجوف ارتفاعه h ونصف قطر قاعدته a .(٧ درجات)

ب- اذا كان أقصى ارتفاع لقذيفة هو $50\ m$ ومدى هذه القذيفة على المستوى الأفقى المار بنقطة القذف هو $400\ m$ أوجد سرعة وزاوية القذف وزمن الطيران اذا علم أن عجلة الجاذبية الأرضية $g = 9.8\ m/sec^2$.(١٣ درجة)

....

٤-أ- أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالمنحنى $y^2 = 4ax$ والمحور oy والمستقيمين $y = 0 , y = 1$.(٧ درجات)

ب- $ABCD$ مستطيل فيه $AD = 3\ cm , AB = 4\ cm$ أثرت قوى مقاديرها $5, 4, 3, 6, 5\ N$ فى الأضلاع AC, DA, DC, BC, AB على الترتيب عين المحصلة مقدارا" واتجاها" وأوجد معادلة خط عملها .(١٣ درجة)

....

٥- أ- اذا كان المجموع الجبرى لعزوم القوى المستوية حول النقاط $(0,0),(1,0),(0,2)$ هو $10,5,20\ Nm$ أوجد مقدار واتجاه ومعادلة خط عمل المحصلة .(١٠ درجات)

ب- تطير طائرة بسرعة ثابتة v_1 على ارتفاع ثابت h ، اذا أطلقت قذيفة مدفع عندما يصنع المستقيم الواصل من الطائرة للمدفع زاوية α مع الأفقى .أثبت أن القذيفة تصيب الطائرة اذا تحقق الشرط $2v_1(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha = gh$.حيث v_2 هى سرعة القذيفة .(١٠ درجات)

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق .ا.د/محمود عبد العاطى

<u>نموذج الأجابة</u>

<u>اجابة السؤال الأول</u>

<u>أ-الحـــل:</u>

$$v = \dot{x} = -15\cos\frac{5}{2}t + 20\cos\frac{5}{2}t$$

$$f = \ddot{x} = -\frac{75}{2}\cos\frac{5}{2}t - 50\sin\frac{5}{2}t = -\frac{25}{4}(6\cos\frac{5}{2}t + 8\sin\frac{5}{2}t)$$

$$\ddot{x} = -\frac{25}{4}x$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة وحلها هو المعادلة السابقة

$$A = 6\ \ ,B = 8\ \ ,\omega = \frac{5}{2} \Longrightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5/2} = \frac{4\pi}{5}\ \ sec$$

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

زاوية الطور الأبتدائية تساوى

$$\varepsilon = \tan^{-1}\left(-\frac{B}{A}\right) = \tan^{-1}(-\frac{4}{3})$$

اكبر سرعة واكبر عجلة

$$v_{max} = \omega a = \frac{5}{2}.10 = 25\ \ m/sec$$

$$f_{max} = \omega^2 a = \frac{25}{4}.10 = \frac{125}{2} = 62.5\ m/sec^2$$

ب-تتحرك نقطة مادية في مستوى وكانت مركبتا سرعتها بالنسبة للمحورين ox, oy اللذين يدوران بسرعة زاوية ثابتة ω هما $\frac{4}{5}\omega x$, $\frac{4}{5}\omega y$ علي الترتيب ٠ أثبت أن مسار هذه النقطة قطع ناقص وأن الزمن الدوري $\frac{10\pi}{3\omega}$

ب- الحل:-

$$\dot{x} - \omega y = \frac{4}{5}\omega y \qquad (1)$$

$$\dot{y} + \omega x = \frac{4}{5}\omega x \qquad (2)$$

من المعادلتين $(1),(2)$ ينتج أن

$$\dot{x} = \frac{9}{5}\omega y \qquad (3)$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{5}\omega x \qquad (4)$$

بتفاضل المعادلة (3) وبالتعويض في المعادلة (4) نحصل علي

$$\ddot{x} = \frac{9}{5}\omega \dot{y} = -\frac{9}{25}\omega^2 x \qquad (5)$$

المعادلة (5) تمثل معادلة حركة توافقية زمنها الدوري $2\pi / \frac{3}{5}\omega$ أي أن الزمن الدوري يساوي $10\pi/3\omega$ وبالمثل بتفاضل المعادلة (4) والتعويض في المعادلة (3) ينتج أن

$$\ddot{y} = -\frac{9}{25}\omega^2 y \qquad (6)$$

والمعادلة (6) تمثل أيضا معادلة حركة توافقية بسيطة زمنها الدوري $10\pi/3\omega$ ٠

$\therefore$ المسار قطع ناقص له نفس الزمن الدوري $10\pi/3\omega$ ويمكن إيجاد معادلة المسار مباشرة من المعادلتين $(3),(4)$ بحذف الزمن بينهما

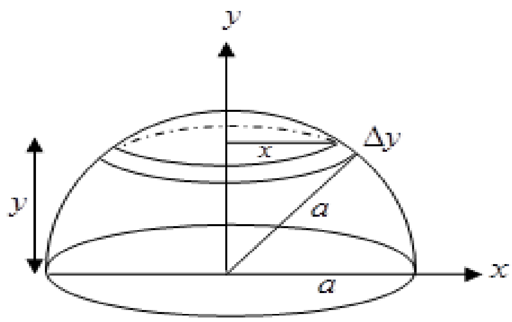
$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -9\frac{y}{x} = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad \therefore \int x dx = -9\int y dy + c$$

$$x^2 + 9y^2 = c \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{c/9} = 1$$

وهذه تمثل معادلة قطع ناقص ٠

اجابة السؤال الثانى

أ ـ مركز ثقل نصف كرة مصمتة



نقسم الكرة إلى عناصر على هيئة أقراص تنتج من رسم مستويات متوازية وموازية للقاعدة ٠ نعتبر إحداهما وليكن القرص ذو السمك Δy ويبعد عن القاعدة مسافة y من القاعدة ونصف قطره x ٠ إذن من العلاقات الهندسية نجد أن

$$x^2 + y^2 = a^2$$

وزن القرص

$$\delta w = \rho\pi\, x^2 \Delta y = \rho\pi\,(a^2 - y^2)\Delta y$$

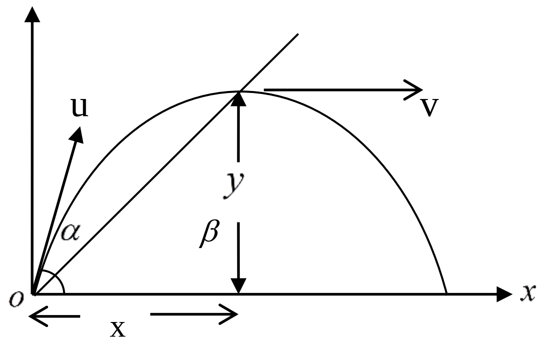
ومركز ثقل هذا العنصر هو $(0, y)$ ولذلك يكون مركز ثقل نصف الكرة المصمتة

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (0, \bar{y})$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\int_0^a \rho\pi(a^2 - y^2) y dy}{\int_0^a \rho\pi(a^2 - y^2) dy} = \frac{3}{8}a$$

أي أن مركز ثقل نصف الكرة المصمتة يقع على محورها ويقسمه بنسبة $3:5$ من جهة القاعدة المستوية.

ب-



$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = -g$$

$$\dot{x} = u\cos(\alpha+\beta) \qquad \dot{y} = u\sin(\alpha+\beta) - gt$$

$$x = ut\cos(\alpha+\beta) \qquad , y = ut\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}gt^2$$

حيث أن القذيفة تصدم المستوى فى اتجاه أفقى

$$\therefore \dot{y} = 0 \Longrightarrow t = \frac{u}{g}\sin(\alpha+\beta) \qquad (1)$$

ومن الرسم

$$\tan\beta = \frac{y}{x} = \frac{ut\sin(\alpha+\beta) - \frac{1}{2}gt^2}{ut\cos(\alpha+\beta)} \qquad (2)$$

بالتعويض عن من (١) فى (٢)

$$\tan\beta = \frac{u.\frac{u}{g}\sin^2(\alpha+\beta) - \frac{g}{2g^2}.u^2\sin^2(\alpha+\beta)}{u.\frac{u}{g}\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha}{2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin\beta\cos\beta = \tan\alpha\,[\cos^2\beta + 2\sin^2\beta]$$

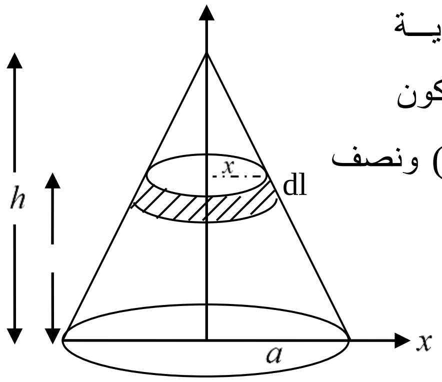
$$\tan\alpha = \frac{\sin\beta\cos\beta}{(1+\sin^2\beta)}$$

وهو المطلوب

y

اجابة السؤال الثالث

أ-- مركز ثقل مخروط دائري أجوف ارتفاعه h ونصف قطر قاعدتهa



نقسم المخروط إلى عناصر بواسطة مستويات متوازية وموازية للقاعدة ونعتبر إحدى هذه العناصر وسيكون على شكل حلقة طول راسمها dl ومركز ثقلها $(0, y)$ ونصف قطرها x وعلى ذلك يكون وزن العنصر

$$dm = 2\pi x dl\, \rho$$

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2} dy$$

ومن هندسة الشكل نجد أن

$$\frac{x}{a} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow \therefore x = \frac{a(h-y)}{h}$$

$$\frac{dx}{dy} = -a \Rightarrow dl = \sqrt{1+a^2} dy$$

$$dm = 2\pi x \rho \sqrt{1+a^2} dy$$

ومركز ثقل العنصر هو $(0, y)$ ، إذن مركز ثقل المخروط الأجوف

$$\overline{x} = 0, \overline{y} = \frac{\int y dm}{\int dm} = \frac{\int_0^h y.\, 2\pi x \sqrt{1+a^2} dy.\, \rho}{\int_0^h 2\pi x \sqrt{1+a^2} dy.\, \rho} = \frac{\int_0^h y.\frac{a}{h}(h-y)\, dy}{\int_0^h \frac{a}{h}(h-y)\, dy}$$

$$= \frac{\left[\frac{hy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^h}{\left[hy - \frac{y^2}{2}\right]_0^h} = \frac{1}{3} h$$

أي أن مركز ثقل مخروط دائري قائم أجوف يقع على محوره ويقسمه بنسبة $(\mathbf{1:2})$**من جهة القاعدة**

ب-**الحـــل :**

أقصى ارتفاع $y_{\max}$ يساوي $50\ m$

$$\therefore\ y_{\max} = \frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha \ = 50\, m\, (1)$$

المدى R يساوي $400\ m$

$$\therefore\ R=\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha=400\,m\,(2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1) نجد أن

$$\frac{\frac{u^2}{2g}\sin^2\alpha}{\frac{u^2}{g}\sin 2\alpha}=\frac{50}{400}\quad\Rightarrow\quad\therefore\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

بالتعويض في المعادلة (1) نحصل على

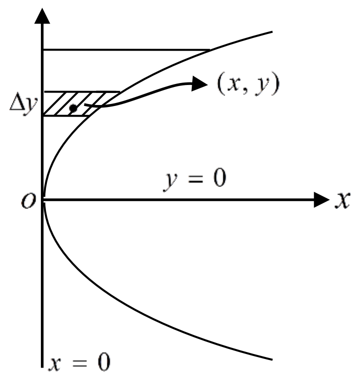
$$\frac{u^2}{2\times 9.8}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=50\,m\quad\Rightarrow\quad u^2=50\times 2\times 9.8\times 5=4900\quad\Rightarrow\quad u=70\,m/\sec$$

زمن الطيران T يساوي

$$T=\frac{2v_\circ\sin\alpha}{g}=\frac{2(70)(1/\sqrt{5})}{9.8}\approx 6.39\sec$$

<u>اجابة السؤال الرابع</u>

أ-**<u>الحـــل:</u>**



نقسم المساحة المذكورة إلى شرائح متوازيـــة وموازيـــة للمحـور ox ٠ وبفرض أن ρ هي كثـــافة وحدة المســـــاحات وباعتبار إحدى هذه الشرائح التي عرضها Δy وطولها x ٠

$\therefore$ وزن الشــــريحة $dw=\rho\,xdy$ ومركز ثقل الشـــريحة $\left(\frac{x}{2},y\right)$

وعلى ذلك يكون مركز ثقل الساحة

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1\rho\,x\cdot\frac{x}{2}dy}{\int_0^1\rho\,xdy}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^1 x^2dy}{\int_0^1 xdy}$$

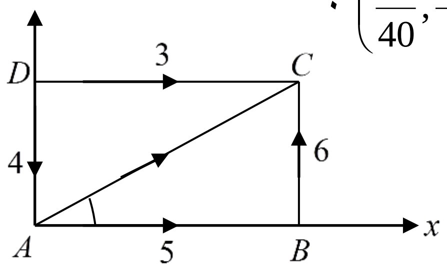
ومن معادلة المنحنى نجد أن $x=y^2/4a$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على

$$\bar{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\int_0^1 \frac{y^4}{16a^2}dy}{\int_0^1 \frac{y^2}{4a}dy}=\frac{1}{8a}\frac{\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1}{\left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1}=\frac{3a}{40}$$

وبالمثل

$$\bar{y}=\frac{\int_0^1 \rho\, x\cdot y dy}{\int_0^1 \rho\, x dy}=\frac{\int_0^1 \frac{y^3}{4a}dy}{\int_0^1 \frac{y^2}{4a}dy}=\frac{3a}{4}$$

وعلى ذلك يكون إحداثي مركز الثقل هو $\left(\frac{3a}{40},\frac{3a}{4}\right)$.



ب-الحـــل:

$$R_x=5+3+5\cos\alpha=8+5\times\frac{4}{5}=12$$

$$R_y=6-4+5\sin\alpha=2+5\times\frac{3}{5}=5$$

$$M_A=-3(3)+6(4)=15$$

مقدار المحصلة يساوي

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(12)^2+(5)^2}=13\ N$$

وإذا كانت المحصلة تصنع زاوية θ مع محور x فإن

$$\theta=\tan^{-1}(5/12)$$

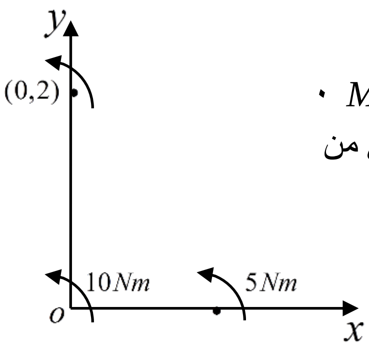
معادلة خط عمل المحصلة هي

$$M_A=xR_y-yR_x \quad\Rightarrow\quad 5x-12y=15$$

حيث نقطة الأصل o هي النقطة A .

اجابة السؤال الخامس

أ-الحـــل:



نفرض أن مجموعة القوى تكـافئ قوة R تمر بنقطة o وازدواج عزمه $M_\circ$.
إذن المجموع الجبري لعزوم القوى حـول أيه نقطة أخرى $A(x,y)$ تعطى من العلاقة

$$M_A=M_\circ-xR_y+yR_x \quad (1)$$

عند النقطة $(0,0)$ العزوم تساوي $10\ Nm$

$\therefore M_{\circ} = 10$

عند النقطة $(1,0)$ العزوم تساوي $5\ Nm$

$\therefore M_{\circ} - R_y = 5 \qquad (2)$

عند النقطة $(0,2)$ العزوم تساوي $20\ Nm$

$\therefore M_{\circ} + 2R_x = 20 \qquad (3)$

بحل هذه المعادلات الثلاثة نحصل على

$M_{\circ} = 10\ Nm \quad , \quad R_x = 5\ N \quad , \quad R_y = 5\ N$

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}\ N = 5\sqrt{2}\ N$

وتصنع زاوية θ مع ox حيث

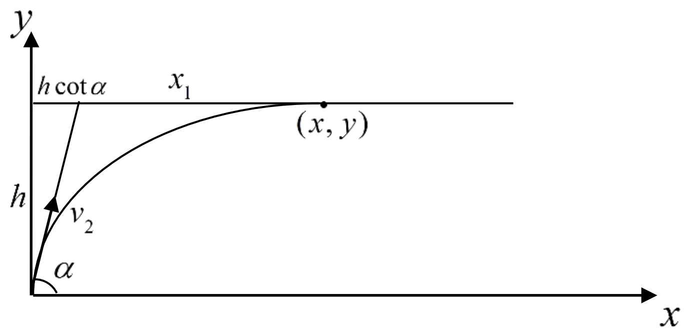
$\tan\theta = R_y / R_x = 1 \quad \Rightarrow \quad \therefore \theta = 45^{\circ}$

أما معادلة خط عمل المحصلة نحصل عليها من المعادلة

$M_{\circ} - xR_y + yR_x = 0 \quad \Rightarrow \quad \therefore 10 - 5x + 5y = 0 \quad i.e \quad x - y - 2 = 0$

ب- الحل

تصيب القذيفة الطائرة إذا تساوى الإحداثيات الكارتيزية لكل من القذيفة والطائرة في نفس اللحظة .



فإذا كانت x_2 هي المسافة الأفقية التي يقطعها المقذوف ، وكانت x_1 هي المسافة الأفقية التي تقطعها الطائرة في نفس الزمن t فإن

$x_2 = x_1 + h\cot\alpha \quad (1)$

$x_2 = v_2 t\cos\alpha \qquad ، \qquad x_1 = v_1 t$

$\therefore v_2 t\cos\alpha = v_1 t + h\cot\alpha$

$$\therefore t = \frac{h\cot\alpha}{v_2\cos\alpha - v_1} \qquad (2)$$

$$y = h = v_2 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (3)$$

من المعادلتين (2), (3) نحصل على

$$h = (v_2\sin\alpha)\frac{h\cot\alpha}{v_2\cos\alpha - v_1} - \frac{gh^2\cot^2\alpha}{2(v_2\cos\alpha - v_1)^2}$$

$$(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha = \frac{ghv_2\sin^2\alpha(v_2\cos\alpha - v_1)}{2\cos\alpha}$$

$$\therefore gh = 2\tan^2\alpha(v_2\cos\alpha - v_1)\times\left[v_2\cos\alpha - (v_2\cos\alpha - v_1)\right]$$

$$\therefore gh = 2v_1(v_2\cos\alpha - v_1)\tan^2\alpha$$

انتهت الأجابة النموذجية