جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات - الفصل الدراسي الصيفي للعام ٢٠١٥ /٢٠١٦

امتحان المستوى الثاني – شعبة حاسب وشعبة رياضيات

المادة / الميكانيكا النيوتونية ٢٣١ ر **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوى) :-

السؤال الأول

أ- إذا كانت العلاقة بين المسافة x والزمن t لجسيم يتحرك في خط مستقيم هي $x = e^{2t} - 2e^{-2t}$ فأثبت أن

$$v^2 = 4(x^2 + 8) \quad ، \quad f = 4x$$

ب- أوجد مركز ثقل المساحة المحدودة بالمنحنى $y^2 = 4ax$ والمحور oy والمستقيمين $y = 0 \,, y = 1$ ٠

السؤال الثاني

أ- تتعين سرعة جسيم على محور x بالمعادلة $v^2 = -2x^2 + 4x + 6$ حيث الزمن بالثانية والمسافة بالمتر ٠ أثبت أن الحركة توافقية بسيطة وأوجد مركزها وسعتها وترددها وأكبر قيمة للعجلة ٠

ب- $OABC$ مربع طول ضلعه $1\,m$ أثرت قوى مقاديرها $2,6,2\ ,5,3\sqrt{2}$ نيوتن في الأضلاع OA, AB, BC, CO, OB على الترتيب وفي اتجاه ترتيب الحروف ٠ أوجد مقدار واتجاه المحصلة وأوجد معادلة خط عملها ٠

السؤال الثالث

أ- أستنتج مركبات السرعة والعجلة لجسيم يتحرك منسوبا إلى الإحداثيات القطبية وإذا علم أن مركبتي سرعة جسيم في إتجاه متجه الموضع والعمودي عليه هما $\mu\theta, \lambda r$ على الترتيب حيث μ, λ ثابتان ٠ أوجد معادلة المسار وأثبت أن مركبتي العجلة في نفس الاتجاهين السابقين هما على الترتيب :

$$\lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r} \quad ، \quad \mu\theta\left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right)$$

ب- وضع جسيم كتلته $4\,kg$ على مستوى أملس يميل على الأفقي بزاوية 30° ومنع من الانزلاق بواسطة قوتين أحداهما $P\,N$ في اتجاه المستوى إلى أعلى والأخرى أفقية مقدارها $8\sqrt{3}\,N$ بحيث كانت القوتان في المستوى الرأسي المار بخط أكبر ميل٠ أوجد مقدار P ومقدار رد فعل المستوى على الجسيم ٠

السؤال الرابع

قذف جسيم بسرعة ابتدائية مقدارها u في اتجاه يميل على الأفقي بزاوية مقدارها α أوجد زمن الطيران وزمن الوصول لأقصى ارتفاع وما العلاقة بين الزمنين ثم أوجد المدى وأقصى ارتفاع يصل إليه المقذوف وأوجد قيمة السرعة التي يصدم بها المقذوف المستوى الأفقي ٠

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة الميكانيكا النيوتونية ٢٣١ ر لطلبة تخلفات المستوى الثاني شعبةحاسب وشعبة رياضيات– الفصل الصيفي للعام الدراسى ٢٠١٥/٢٠١٦

تاريخ الاختبار الأحد الموافق ٢٠١٦/٩/٤ (ورقه امتحانيه كاملة) الزمن ساعتان

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول

أ- بتفاضل العلاقة المعطاه بالنسبة للزمن نحصل على

$$v = 2e^{2t} + 4e^{-2t} \qquad (1)$$

بتربيع العلاقة (1) نجد أن

$$v^2 = 4e^{4t} + 16 + 16e^{-4t} = 4(e^{4t} + 4 + 4e^{-4t})$$

$$\therefore v^2 = 4(x^2 + 8) \qquad (2)$$

للحصول على العجلة f نفاضل المعادلة (2) بالنسبة للزمن t

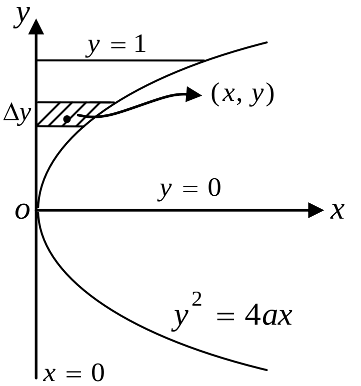
$$\therefore f = 4e^{2t} - 8e^{-2t} = 4(e^{2t} - 2e^{-2t}) = 4x$$

يمكن الحصول على هذه العلاقة مباشرة من تفاضل المعادلة (2) مباشرة بالنسبة إلى x نحصل على $f = 4x$

ب- نقسم المساحة المذكورة إلى شرائح متوازية وموازية للمحور ox ، وبفرض أن ρ هي كثافة وحدة المساحات وباعتبار إحدى هذه الشرائح التي عرضها Δy وطولها x

$\therefore$ وزن الشريحة $dw = \rho x dy$ ومركز ثقل الشريحة $(x/2, y)$

وعلى ذلك يكون مركز ثقل الساحة



$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 \rho x \cdot \frac{x}{2} dy}{\int_0^1 \rho x dy} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^1 x^2 dy}{\int_0^1 x dy}$$

ومن معادلة المنحنى نجد أن $x = y^2/4a$ بالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على $\bar{x} = 3a/40$ وبالمثل $\bar{y} = 3a/4$

وعلى ذلك يكون إحداثي مركز الثقل هو $\left(\frac{3a}{40}, \frac{3a}{4}\right)$.

إجابة السؤال الثانى :

أ- عجلة الجسيم عند أي لحظة تتعين من العلاقة

$$\ddot{x} = f = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dx} = -2x + 2 = -2(x-1)$$

وهي تمثل معادلة حركة توافقية بسيطة مركزها $x = 1$ وسرعتها الزاوية $\omega = \sqrt{2}$ وزمنها الدوري $\tau = 2\pi/\omega = \sqrt{2}\pi$

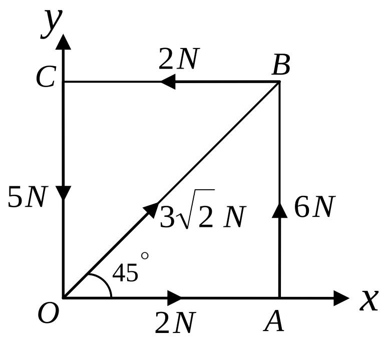
لإيجاد سعة الذبذبة نعين النقط التي تتلاشى عندها السرعة أي أن .

$$\therefore x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x_1 = -1 \quad , \quad x_2 = 3 \quad , \quad \therefore 2a = x_2 - x_1 = 4m$$

$\therefore$ سعة الحركة تساوي $2m$ ، أكبر قيمة للعجلة تساوي

$$\because f_{max} = \omega^2 a \Rightarrow \therefore f_{max} = (\sqrt{2})^2 \times 2 = 4m/\sec^2$$



ب- باختزال مجموعة القوى إلى قوة محصلة مركباتها (R_x, R_y) وازدواج عزمه $M_\circ$ وذلك عند o

$$R_x = 2 + 3\sqrt{2}\cos 45^\circ - 2 = (3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\ N$$

$$R_y = 6 + 3\sqrt{2}\sin 45^\circ - 5 = 1 + (3\sqrt{2})\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 4\ N$$

$$M_\circ = (6)(1) + 2(1) = 8\ Nm$$

إذن المحصلة تكافئ قوة مقدارها

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\ N$$

وتصنع زاوية θ مع OA مقدارها

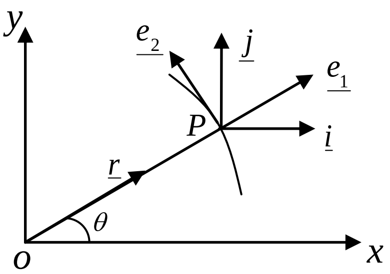
$$\theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

ومعادلة خط عمل المحصلة بالنسبة للمحورين OA, OC هي

$$M_\circ - xR_y + yR_x = 0$$

$$\therefore\quad 8 - 4x + 3y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4x - 3y - 8 = 0$$

إجابة السؤال الثالث :



أ- اعتبر نقطة مادية تتحرك في المستوى ولنفرض أن $P(r,\theta)$ موضع النقطة المتحركة عند اللحظة t ، بإختيار المحورين ox منطبقا على oP ، oy عمودي على oP في اتجاه تزايد θ ، هذه المجموعة تدور حول o في المستوى بسرعة زاوية $\dot{\theta}$ وبإتخاذ متجهي الوحدة في اتجاهي المحورين ox, oy هما $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ على الترتيب

$$\therefore \underline{r} = \overrightarrow{oP} = r\underline{e}_1$$

$$\therefore \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\underline{e}_1) = \dot{r}\,\underline{e}_1 + r\frac{d\underline{e}_1}{dt} = \dot{r}\,\underline{e}_1 + r\dot{\theta}\,\underline{e}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \therefore \underline{v} \equiv (\dot{r}, r\dot{\theta})$$

تسمى المركبة الأولى للسرعة بالسرعة النصف قطرية والمركبة الثانية للسرعة بالسرعة المستعرضة ، وبالمثل يمكن الحصول على مركبات العجلة $\underline{f} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_1 + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\underline{e}_2$

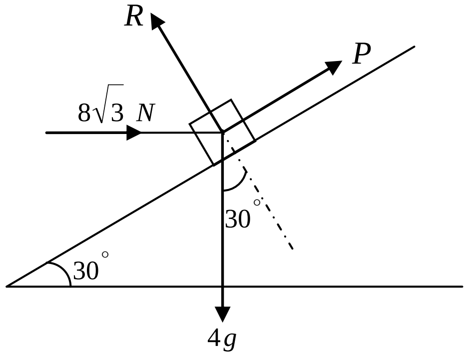
بما أن $r\dot{\theta} = \mu\theta$ ، $\dot{r} = \lambda r$ بالقسمة نجد أن

$$r\frac{d\theta}{dr} = \frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\theta}{r} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{\mu}{\lambda}\frac{dr}{r^2} = \frac{d\theta}{\theta} \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mu}{\lambda r} = \ln\theta + c$$

حيث c ثابت التكامل ، المعادلة السابقة هي معادلة المسار ، نوجد الآن العجلة

$$f_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \lambda^2 r - \frac{\mu^2\theta^2}{r}$$

$$f_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{\mu^2\theta}{r} + \lambda r\frac{\mu\theta}{r} = \mu\theta(\lambda + \frac{\mu}{r})$$



ب- نفرض أن رد فعل المستوى على الجسيم هو R ، من شروط الاتزان في اتجاه المستوى نجد أن

$$4g\sin 30^\circ = 8\sqrt{3}\cos 30^\circ + P$$

$$4g\times(1/2) = 8\sqrt{3}\times(\sqrt{3}/2) + P$$

$$\therefore P = 2g - 12 = 2\times 9.81 - 12 = 7.6\ N$$

بالتحليل في الاتجاه العمودي على المستوى نجد أن

$$R = 4g\cos 30^\circ + 8\sqrt{3}\sin 30^\circ = 4g\times(\sqrt{3}/2) + 8\sqrt{3}\times(1/2) = 2g\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 40.87\ N$$

إجابة السؤال الرابع :

(1) $m\ddot{x} = 0$ (2) $m\ddot{y} = -mg$

من المعادلة (1) نجد أن

(3) $$\frac{d\dot{x}}{dt} = 0 \Rightarrow \dot{x} = const. = u\cos\alpha$$

من المعادلة (2) بفصل المتغيرات وإجراء التكامل نحصل على

(4) $$\therefore \dot{y} = -gt + c$$

عندما $t = 0$ كانت $\dot{y} = u\sin\alpha$ $\Leftarrow$ $c = u\sin\alpha$ بالتعويض في المعادلة (4) نحصل على

(5) $$\therefore \dot{y} = u\sin\alpha - gt$$

من المعادلة (3) نجد أن $x = ut\cos\alpha + c_1$ عندما $t = 0$ كانت $x = 0$ نجد أن $c_1 = 0$

(6) $$\therefore x = ut\cos\alpha$$

من المعادلة (5) وبعد فصل المتغيرات وإجراء التكامل نجد أن

(7) $$y = ut\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$$

لإيجاد زمن الطيران نضع $\dot{y} = 0, t = T$ في المعادلة (7) نحصل على

(8) $$\therefore T = (2u/g)\sin\alpha$$

بالتعويض من المعادلة (8) في المعادلة (6) نحصل على المدى والذي سوف نرمز له بالرمز R حيث

(9) $$R = u\left(\frac{2u}{g}\sin\alpha\right)\cos\alpha = \frac{u^2}{g}\sin 2\alpha$$

من المعادلة (5) بعد وضع $\dot{y} = 0$ نحصل على $t = (u/g)\sin\alpha$ وهو زمن الوصول لاقصى ارتفاع نلاحظ أن زمن الوصول إلى أقصى ارتفاع يساوي نصف زمن الطيران وبالتعويض بزمن الوصول لأقصى ارتفاع في المعادلة (7) نحصل على أقصى ارتفاع يصل إليه الجسم $y_{max} = u^2\sin^2\alpha/2g$ ،

وبالتعويض بزمن الطيران في المعادلتين (3),(5) نحصل على مركبات السرعة وبالتالي نجد أن قيمة السرعة التي يصطدم بها الجسم المستوى تساوي سرعة القذف وتميل على الأفقيي بزاوية $\pi - \alpha$ ،