<u>الأجابة النموذجية لمقرر ديناميكا الموائع للفرقة الرابعة علوم وكذلك الأسئلة بعد الأجابة</u>

<u>أجابة السؤال الأول</u>

أ- ***<u>طرق دراسة الحركة للسوائل :</u>***

تتحدد أى حركة دائما و ذلك بأن ننسبها الى مجموعة من المحاور x_1, x_2, x_3 مثلا و هي أما أن تكون محاور متعامدة و هي تتحدد بمجموعة المحاور الكارتيزية . و نرمز لها بالرمز x, y, z أو بأى مجموعة محاور أخرى منحنية مثلا أو ....

و تتحرك النقطة المادية أو جزئ السائل بالنسبة الى هذه المجموعة من المحاور اذا كانت أحداثياتها x_i حيث $(i = 1,2,3)$ تتغير بتغير الزمن أى ان x_i داله في الزمن أى

$$x_i = f_i(t) \qquad (1) \qquad (i = 1,2,3)$$

و بذلك من الممكن معرفة حركة الجسم اذا عرف قانون الحركة (1) . و هناك وجهتان نظر لدراسه الحركة عموما بالنسبة للسوائل .

أ- ***<u>طريقة لاجرانج Lagrangian method</u>***

و هي تتلخص في تتبع حركة جزئ من السائل .

أى أن هذه الطريقة تعتني بحركة كل جسيم أو جزئ من السائل على حده بإعتبار أن أحداثيات هذا الجزئ دوال في الزمن و لوصفه في لحظة سابقة t_o .

أى أنه بفرض أن عند اللحظة t_o كانت احداثيات الجزئ هي (ξ_1, ξ_2, ξ_3) او (a,b,c) فإنه عند أى لحظة ستكون t هي (x_1, x_2, x_3) و هذه سوف تتعين كدوال في الزمن و في المتغيرات عند t_o أى ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \\ x_2 &= \psi_2(\xi_1,\ldots\ldots\ldots,t) \\ x_3 &= \psi_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3,t) \end{aligned}\right\}$$

تسمى ξ_1,ξ_2,ξ_3,t بمتغيرات لاجرنج.

و تكون مركبات السرعة و العجلة كالتالى

$$u=\frac{\partial x_1}{\partial t} \qquad ,v=\frac{\partial x_2}{\partial t} \qquad ,w=\frac{\partial x_3}{\partial t}$$

$$f_x=\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$ و هكذا

ب-*طريقة اويلر* ***Euler's methods***

اما اذا كان اهتمامنا ليس بتاريخ الحركة لجزئ منفرد و لكن بماذا يحدث في لحظات مختلفة من الزمن عند نقط هندسية في الفراغ بالنسبة الى أحداثيات ما و لتكن إحداثياتها x_1,x_2,x_3 فهذه هي وجهه نظر اويلر .

فمثلا نختار نقطة ما ρ في الفراغ لها أحداثيات (x_1,x_2,x_3) و نرى ماذا يحدث عند هذه النقطة في لحظات من الزمن هذه المتغيرات تسمى بمتغيرات أويلر.

و من الأمثلة على وجهتى نظر لاجرانج و أويلر هي حركة أو إنسياب الماء في قناه فأما أن نتبع حركة جزئ من السائل من المنبع الى المصب و هذه وجهه نظر لاجرانج أو عند نقطة من القناه نتتبع ماذا يحدث عندها عند لحظات متتالية من الزمن و هذه وجهه نظر اويلر.

و الحركة سواء من وجهه نظر أويلر أولا جرانج تعتبر معروفه اذا علم متغيرات الحركة (التي هو كل ما يتعلق بالخواص للسائل مثل السرعة و العجلة و الكثافة و الضغط و درجة الحرارة ,.........) بدلالة متغيرات كل طريقة .

- وهذه هي الصيغة النهائية لمعادلة الاتصال . و هناك صيغ اخرى يمكن بها كتابة هذه المعادلة

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{q}) = o \qquad (6)'$$

و لكن

$$div(\rho \vec{q}) = \vec{\nabla}.(\rho \vec{q}) = \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q})$$

فتكون معادلة الإتصال هي

$$\therefore \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{q}.\vec{\nabla}\rho + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o$$

و لكن من العلاقة السابقة

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{q}.\vec{\nabla})\rho$$

و بذلك نحصل على الصورة التالية لمعادلة الإتصال

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o \qquad (7)$$

إذا كان السائل غير قابل للإنضغاط اى ان الكثافة ثابتة $\frac{d\rho}{dt} = o$

$$\rho(\vec{\nabla}.\vec{q}) = o \qquad or \qquad div\,\vec{q} = o \qquad (8)$$

و هذه المعادلة في الاحداثيات الكارتزية تصبح

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o$$

و في الاحداثيات القطبية

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2V_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\, v_\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V\varphi}{\partial V}=o$$

و في الاحداثيات الإسطوانية تأخذ الصورة

$$\vec{\nabla}.\vec{q}=\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(RV_R\right)+\frac{1}{R}\frac{\partial V\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=o$$

و في الحالة الخاصة الهامة عندما تكون حركة السائل غير دوامية أو غير دورانية أى $\vec{w}=\vec{o}$ و قد أثبتنا انه عندما تكون الحركة غير دوامية فإنه الحركة تكون جهدية أى توجد داله جهد السرعة φ بحيث $\vec{V}=-grad\varphi$ و على ذلك نحصل على

$$div\,\vec{q}=\left(\vec{\nabla}.\vec{q}\right)=\vec{\nabla}.\vec{\nabla}\varphi=\nabla^2\varphi=o \qquad (9)$$

التى يمكن وضعها في الصورة الكارتيزية

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=o$$

و الصورة القطبية

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=o$$

و الصورة الأسطوانية

$$\nabla^2\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

أى أن φ تحقق معادلة لابلاس. و على ذلك φ تسمى في هذه الحالة داله هرمونية .

و من النتائج السابقة إيجادها ينتج أن السائل لا يمكنه الحركة وفق أى قانون أتياري لتوزيع السرعات , و لأجل أن تكون الحركة ممكنه فإنه من الضروري أن تتحقق

معادلة الأتصال . أى لكى تكون الحركة ممكنه لمائع يتحرك حركة عامة غير قابل للإنضغاط يكون الشرط $\vec{\nabla}.\vec{q}=o$ و في الحالة الخاصة للحركة الغير دوامية فإن داله جهد السرعة يجب أن تحقق معادلة لابلاس .

أما اذا كانت الحركة منتظمة أى ان ρ لا تعتمد على الزمن (و لكن تعتمد على الأحداثيات) فيكون $\frac{d\rho}{dt}=o$ و يصبح معادلة الأتصال

$$div(\rho\vec{q})=o \qquad (10)$$

ب- أولا

$$div\ \vec{q}=\vec{\nabla}.\left(-\vec{\nabla}\phi\right)$$
$$=-\nabla^{2\phi}$$
$$\therefore \nabla^2\phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta})$$
$$+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$
$$=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[r^2-U(1-\frac{a^3}{r^3})\cos\theta]$$
$$+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}[\sin\theta+U(r+\frac{a^3}{2r^2})\sin\theta]+o$$
$$=-\frac{U\cos\theta}{r^2}(2r+\frac{a^3}{r^3})+\frac{U(r+\frac{a^3}{2r^2})}{r^2\sin\theta}.2\sin\theta\cos\theta$$
$$=o$$

أى أن معادلة الإتصال تحققت ∴ الحركة ممكنة . حيث

$$\vec{\nabla}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial r}\bar{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\bar{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi$$
$$\vec{q}=-\vec{\nabla}\phi$$
$$=U\cos\theta(1-\frac{a^3}{r^3})\bar{e}_1+U\sin\theta(1+\frac{a^3}{2r^2})\}\bar{e}_2+o.\bar{e}_3$$

$$\therefore q_r = U\cos\theta(1-\frac{a^3}{r^3})$$

$$q_\theta = -U\sin\theta(1+\frac{a^3}{2r^3})$$

$$q_\varphi = o$$

$$\therefore \vec{\nabla}\wedge\vec{q} = \begin{vmatrix} \bar{e}_r & r\bar{e}_\theta & r\sin\theta\,\bar{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ q_r & rq_\theta & r\sin\theta\, q_\varphi \end{vmatrix} = o$$

و هذا يعني أن الحركة غير دورانية

أجابة السؤال الثانى

أ- السائل المثالى . *و هو السائل الغير لزج nonviscous و ايضا نعتبره كسائل غير قابل للإنضغاط .*

- حصلنا من قبل على متجه الانحدار $grad\ T$ للداله القياسية T , و هنا سوف يظهر عندنا تساؤل هل من الممكن ان نضع أى متجه $\vec{A}$ في صورة $grad$ لأى داله قياسيه ϕ مثلا كداله في $\phi(x,y,z,t)$ فإذا كانت هذه الداله موجوده بحيث ان

$$\vec{A} = -grad \quad \phi$$

$$A_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \quad , \quad A_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \quad , \quad A_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} \qquad (8)$$

فإنه يقال أن مجال المتجه $\vec{A}$ هو مجال جهدي , ϕ تسمى بداله الجهد .

بالنسبة الى إمكان وضع متجه السرعة $\vec{q}$ على صورة متجه إنحدار فإنه يقال أن الحركة في هذه الحالة هي حركة جهدية و الدالة ϕ يرمز لها بالرمز ϕ و تسمى بداله جهد السرعة و يكون

$$\vec{q} = -grad\ \varphi$$

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad , \quad w = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \qquad (9)$$

- الدوامة vorticity

المتجه $\vec{w} = cur\ell \vec{q} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q}$

يسمى بمتجه الدوامه أو الدوامة فقط .

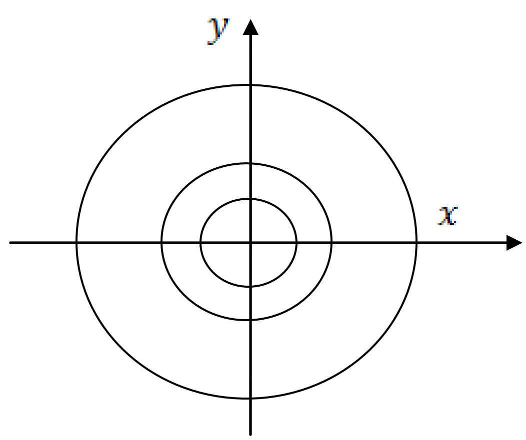
خطوط الدوامة هي هذه الخطوط في السائل الذي المماس عند أي نقطة عليها يكون في إتجاه متجه الدوامة عند هذه النقطة .

و خطوط الدوامة سوف تتحرك مع السائل و يمكن اثبات ذلك .

إذا كان متجه الدوامة لا يساوى الصفر فإنه يقال أن الحركة دوامية أو دورانية . أما اذا كان متجه الدوامة $\vec{w} = o$ فإنه يقال أن الحركة غير دورانية و ذلك عند نقطة السائل الذي $\vec{w} = o$ و في هذه المنطقة لن توجد خطوط دوامية .

ب- **الحل**

واضح أن هذه المركبات لا تتوقف على الزمن أى أن الحركة مستقرة *steady motion* و في هذه الحالة تنطبق



معادلة المسار على معادلة الخطوط الانسيابية و من الواضح أن الحركة مستوية حيث $w = o$

معادلة الخطوط الانسيابية

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$$

$$\frac{dx}{-\beta y} = \frac{dy}{\beta x}$$

$$\therefore xdx + ydy = o$$

و بالتكامل

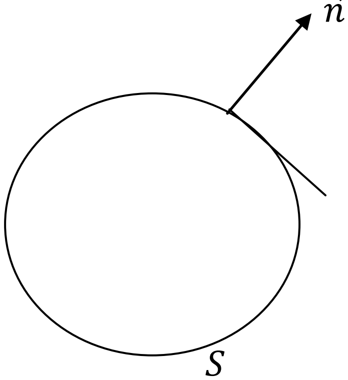
$$x^2 + y^2 = c^2$$

حيث c ثابت و بذلك نجد أن معادلة الخطوط الانسيابية هي معادلة مجموعة من الدوائر المتحدة المركز و هو نقطة الأصل

<u>أجابة السؤال الثالث</u>

1- <u>الشروط الحدية على السطوح الصلبة</u>

أ- لا يوجد إنسياب للمائع خلال السطوح الصلبة أى لا يمكن للسائل أن يخترق السطوح الصلبة و الذي يوجد بداخله المائع.



∴ مركبة سرعة المائع العمودية على السطح s عند أى نقطة

تساوى مركبة السرعة العمودية للسطح الصلب s عند هذه النقطة.

$$\underline{q_s}.\underline{\mathrm{n}} = \underline{\mathrm{q}}.\underline{\mathrm{n}}$$

$\underline{n}$ متجه الوحدة العمودي على s . إذا كانت حركة المائع غير دورانية

$$\therefore \underline{q} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\therefore -\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \underline{q_s}.\underline{n}$$

ب- إذا كان المائع الحقيقي (غير مثالى). المركبة المماسية لسرعة المائع و سرعة السطوح الصلبة تكون واحدة عند أى نقطة من السطح نظرا للزوجة. و في حالة عدم تحرك السطح الصلب أى تكون سرعته تساوى صفر تكون سرعة المائع المماسية مساوية للصفر و يسمى هذا الشرط بشرط عدم الإنزلاق .

ج- إذا كان المائع مثالى فإن مركبة السرعة المماسية للمائع تختلف عن سرعة السطح الصلب و يمكن تعيين السرعة المماسية للمائع بحل المسألة. و في هذه الحاله يتوافر شرط الإنزلاق لا يوجد أى شروط بالنسبة للقابلية للإنضغاط في حالة الموائع المثالية .

<u>الشروط الإبتدائية</u>

- إذا كان المائع ساكنا في المالانهاية ∞

$$\therefore \underline{q} \to \mathrm{o} \qquad \mathrm{as} \qquad \mathrm{r} \to \infty$$

- إذا كان يتحرك بسرعة U في اتجاه محور x

$$\therefore q_x \to U \qquad q_y \to o \qquad , q_z \to o \qquad as \quad r \to \infty$$

$$\therefore \varphi \to -Ux$$

في حالة حركة المائع غير دورانية أى أنها حركة ذات جهد

$$\therefore \varphi - (-Ur\cos\theta) \to o = O\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$as \quad \frac{1}{r} \qquad as \quad r \to \infty$$

في حالة المائع ساكن

$$\varphi \to o \qquad as \quad \frac{1}{r} \qquad as \;\; r \to \infty$$

$$= O\left(\frac{1}{r}\right)$$

إذا كان اللف مساويا للصفر حول اى منحنى مغلق و لا يوجد اى منبع أو مصب خطي, حينئذ

$$\varphi \to o \qquad as \;\; \frac{1}{r} \qquad as \;\; r \to \infty$$

$$\varphi + \mathrm{Ur}\cos\theta = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\right)$$

-طاقة حركة المائع

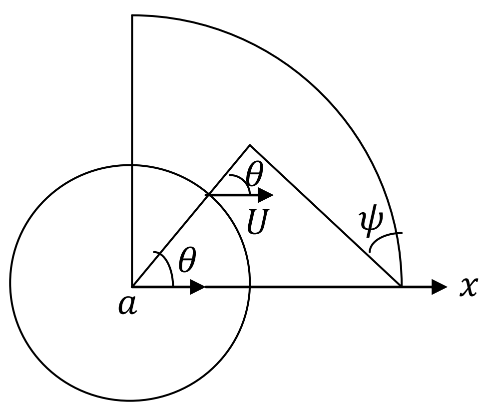
$$\therefore K.E \; of \; all \; fluid = \frac{1}{2}\rho \int \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds$$

ب-

أيضا نأخذ محور x في إتجاه السرعة U

الحركة متماثلة حول هذا المحور .

بإستخدام الاحداثيات الكروية r, θ, ψ



φ لا تعتمد على ψ . و لكن تعتمد على r, θ, t . إذا كانت U تعتمد على t و حيث أن الحركة منتظمة

$\therefore$ φ تعتمد على r, θ فقط

∴ هي تحقق معادلة لابلاس

$$\nabla^2 \varphi = o$$

$$\frac{\partial}{\partial r} r^2 \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{r \sin\theta}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = o \qquad (1)$$

و الشروط الحدية

$$\varphi \to o \qquad as \quad r \to \infty \qquad (2)$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = U \cos\theta \qquad on \quad r = a \qquad (3)$$

بفرض أن φ على الصورة

$$\varphi = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) \cos\theta$$

و هذا ينتج أيضا ناتج من المعادلة (1) بنفس الطريقة السابقة و بإستخدام الشروط الحدية نحصل على

$$(2) \Rightarrow A = o$$

$$(3) \Rightarrow \frac{2B \cos\theta}{a^3} = U \cos\theta \qquad i.e. \quad B = \frac{Ua^3}{2}$$

$$\therefore \varphi = \frac{Ua^3}{2r^2} \cos\theta$$

و هذا هو جهد السرعة

في هذه الحالة للحصول على طاقة حركة المائع

$$K.E = \frac{1}{2}\rho \int_{r=a} \varphi x - \frac{\partial \varphi}{\partial r} ds$$

$$= \frac{1}{2}\rho \int \frac{Ua\cos\theta}{2} xU\cos\theta\, ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int cos^2\theta ds$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{\theta=o}^{\pi} \int_{\tau=o}^{2\pi} cos^2\theta . a^2 \sin\theta\, d\theta d\psi$$

$$= \frac{1}{4}\rho U^2 a \int_{o}^{\pi} cos^2\theta . 2\pi a^2 \sin\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\rho U^2 a^3 \pi . \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\pi a^2 \rho\right) U^2$$

$$= \frac{1}{4} M U^2$$

حيث M هي كتلة السائل المزاح .

<u>أجابة السؤال الرابع</u>

أ- <u>أ- معادلات أويلر</u>

$$\frac{d\overline{q}}{dt}=\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\frac{1}{2}\vec{\nabla}q^2-\vec{q}\wedge\vec{w}=F-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\rightarrow(1)$$

$$\frac{\partial\overline{q}}{\partial t}+\left(\vec{q}.\vec{\nabla}\right)\vec{q}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \qquad \rightarrow(2)$$

المعادلة (3) يمكن كتابتها على صورة 3 معادلات قياسية و ذلك بإستخدام الأحداثيات الكارتيزية أى

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=F_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=F_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=F_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

المعادلة $\frac{1}{2}q^2+\Omega+p=const.$

<u>تسمى بمعادلة برنولي أو التكامل العام لبرنولي</u>

تكون الحركة جهدية فإنها ستكون غير دوامية أى أن صفر $=\vec{\omega}$ و على ذلك تصبح المعادلات (4) في الصورة

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\phi+\vec{\nabla}H=o \qquad or$$

$$\vec{\nabla}\left[-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\Omega+p\right]=o$$

و بالتكامل بالنسبة الى الموضع نجد أن

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}q^2+\Omega+p=const.=clt)$$

و هذا الثابت سيكون داله في الزمن إذ أن التكامل سيكون بالنسبة الى الموضع.

هذا المقدار أو التكامل يسمى نتكامل لاجرانج- كوشي .

ب-حيث أن السرعة الزاوية الثابتة هي w , بفرض أن $\underline{r}$ هو متجه موضع نقطة على المائع.

∴ سرعة هذه النقطة

$$\underline{w} \wedge \underline{r} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ o & o & w \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= -wy\underline{i} + wx\underline{j} + o.\underline{k}$$

مركبات السرعة هي $(-wy, wx, o)$

مركبات القوى الخارجية $(o, o, -g)$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية لوحدة الكتل

بتطبيق معادلات اويلر للحركة للحصول على الضغط و حيث ان الحركة مستقرة

$$\frac{\partial q}{\partial t} = o$$

$$o + o + wx(-w) + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$o + -wy(w) + o + o = o - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{y}$$

$$o + o + o + o = -g\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

و لكن

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$$

$$= \rho w^2(xdx + ydy) - \rho gdz$$

$$\therefore p = \frac{\rho w^2}{2}(x^2 + y^2) - \rho gz + c$$

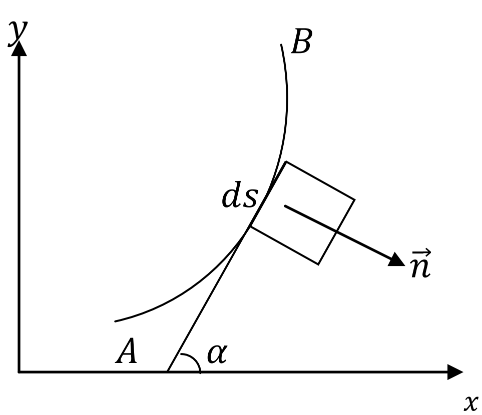
أجابة السؤال الخامس

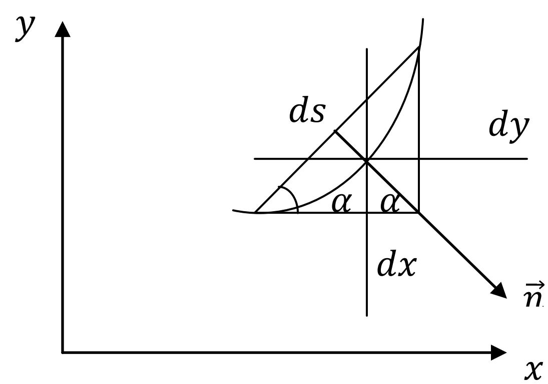
أ- فيض السائل خلال اى منحنى موجود فى السائل (المعنى الطبيعي للدالة ψ):

يعرف فيض السائل خلال أى منحنى AB موجود في السائل بأنه حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن

ملحوظة:

عندما تتكلم عن فيض السائل خلال أى منحنى في المستوى xy فإننا نقصد بذلك فيض السائل خلال سطح إسطوانى له مقطع هو هذا المنحنى و ممتد الى اللانهاية في اتجاه محور z العمودي على المستوى و ذلك خلال وحدة الأطوال من هذه الاسطوانة .





نفرض ان سرعة السائل هي $\vec{q}$. نفرض أن $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج.

بذلك تكون مركبة سرعة السائل في إتجاه عمودي على المنحنى هي $(\vec{n}, \vec{q})$.

بأخذ عنصر ds من المنحنى فإن حجم السائل الذي يخترق مساحة من الإسطوانة اللانهائية على هيئة مستطيل طوله يساوى طول الوحدة من الأسطوانة و عرضه

يساوي طول الجزء ds من مقطع الاسطوانة اى طول ds من المنحنى الموجود في المستوى xy و ذلك في وحدة الزمن هو

$$(\vec{n}.\vec{q}).1ds$$

بذلك يكون الحجم الكلي الذي يخترق الأسطوانة التي طولها الوحدة و مقطعها هو المنحنى AB خلال وحدة الزمن هو

$$Q=\int_{A}^{B}(\vec{q}.\vec{n})ds$$

و لكن المتجه $\vec{n}$ هو متجه الوحدة العمودي على المنحنى الى الخارج و هذا المتجه كما هو واضح من الرسم سوف يميل بزاوية α على الرأس الى أسفل حيث α هي زاوية ميل المماس للمنحنى فيكون

$$\vec{n}=1.\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j}$$

لأن طوله الوحدة أى

$$\vec{n}=\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j}$$

أما المتجه $\vec{q}$ فهو

$$\vec{q}=u\vec{i}+v\vec{j}$$

و على ذلك يكون الفيض للسائل خلال المنحنى AB هو

$$Q=\int_{A}^{B}(\vec{q}.\vec{n})ds=\int_{A}^{B}(u\sin\alpha-v\cos\alpha)ds$$

$$=\int_{A}^{B}\left(u\frac{dy}{ds}-v\frac{dx}{ds}\right)ds$$

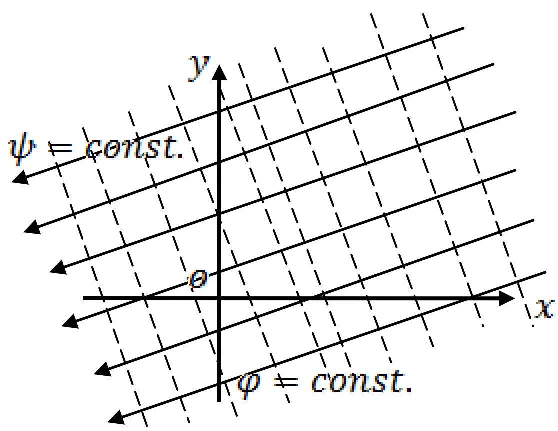
و بالتعويض من معادلة كوشي ريمان (9) بدلا من u, v بدلالة الأنسياب ψ نحصل على الفيض هو

$$Q = \int_A^B \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx\right) = \int_A^B d\psi$$

$$\therefore Q = \psi_B - \psi_A \qquad (13)$$

أي أن حجم السائل الذي يخترق المنحنى AB في وحدة الزمن يساوي الفرق بين دالتي الإنسياب ψ عند نهاية و بداية المنحنى . أى يعتمد فقط على قيمة دالة الانسياب عند نهايتي المنحنى.

ب-أ- الإنسياب المنتظم في خط مستقيم :



لنفرض أن الإنسياب المستوي لمائع يعطى بدالة جهد السرعة الآتية

$$\varphi = ax + by$$

حيث a, b عددان حقيقيان ثابتان موجبان.

فلكي ندرس هذا الإنسياب تفاضل الدالة φ بالنسبة لكل من x, y فنجد أن

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a \qquad , \frac{\partial \varphi}{\partial y} = b$$

أى أن مركبتي السرعة في إتجاهي المحورين هما

$$u = -a \qquad , \qquad v = -b$$

و هما ثابتان. و أن السرعة المحصلة

$$q = \sqrt{a^2 + b^2}$$

و هي ثابتة و تصنع مع محور x زاوية ظلها $= \frac{b}{a}$ و الآن نوجد الخطوط الإنسيابية كالآتى:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

$$= vdx - udy = -bdx + ady$$

$$\therefore \psi = ay - bx + const$$

$\therefore$الخطوط الإنسيابية هي $\psi = const.$ أى هى

$$ay - bx = const.$$

و هذه المعادلة تمثل مجموعة من الخطوط المستقيمة المتوازية يصنع كل منها زاوية α مع محور x حيث $\tan \alpha = \frac{b}{a}$.

و خطوط تساوى الجهد هي $ax + by = const.$ و موضح بالرسم خطوط تساوى الجهد بخطوط منقطة و خطوط الأنسياب بخطوط متصلة . وواضح أن تساوي الجهد متعامد مع خطوط الإنسياب.

- *حالة خاصة (1):*

إذا كان الإنسياب موازيا المحور x كان

$$\varphi = ax \qquad , \qquad \psi = ay$$

- *حالة خاصة (2):*

إذا كان الإنسياب موازيا لمحور y كان

$$\varphi = by \qquad , \qquad \psi = -bx$$

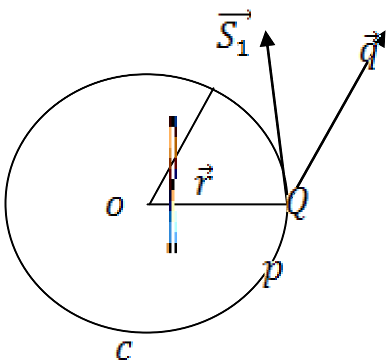
أجابة السؤال السادس

أ-- *الحركة غير دورانية Irrotational motion*

نفرض O نقطة ثابتة , P أي نقطة من نقط

الجزء الذي فيه الحركة للسائل غير دوامية

(غيردورانية)



سوف نوصل النقطة P بالنقطة O بالمنحنيين

OBP,OAP و كل منهم يقع أيضا في جزء السائل

الذي فيه الحركة غير دوامية .

سنطبق نظرية ستوكس على المنحنى

المغلق $OAPBO$ فيكون

$$\Gamma_{OAPBO} = \int_{OAPBO} \vec{q}.d\vec{S} = \int_S \vec{n}.\left(\vec{\nabla} \wedge \vec{q}\right) dS \qquad (1)$$

حيث S أى سطح يمكن إنشاؤه على المنحنى $OAPBO$ بحيث يقع كله في جزء السائل الذي فيه الحركة غير دوامية و بما ان الحركة غير دوامية فيكون متجه الدوامية يساوي الصفر

$$\therefore \vec{w} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = cur\ell \vec{q} = \vec{o} \qquad (2)$$

بذلك نستنتج أنه من (1)

إذا كانت الحركة غير دوامية فيكون اللف Γ حول أى منحنى مغلق موجود داخل السائل يساوى صفر.

و لكن من (1)

$$\int_{OAPBO} \vec{q}.d\vec{S} = \int_{ABO} \vec{q}.d\vec{S} + \int_{PBO} \vec{q}.d\vec{S} = o$$

$$\therefore \int_{OAP} \vec{q}.d\vec{S} = -\int_{PBO} \vec{q}.d\vec{S}$$

$$= \int_{OBP} \vec{q}.d\vec{S} = -\phi_P say \qquad (3)$$

حيث ϕ_P أى داله قياسية التي قيمتها تعتمد فقط على موضع النقطة P (و موضع النقطة الثابتة O أيضا) و لكن لا تعتمد على أختيار الطريق من O الى P .

نختار نقطة أخرى Q قريبة جدا من P حيث انه يمكن اعتبار أن متجه السرعة $\vec{q}$ ثابت في إتجاه PQ و لنفرض أن ζ هو متجه موضع Q بالنسبة الى P ففي هذه الحالة يمكن كتابة العلاقة التقريبية الاتية:

$$\vec{q}.\vec{\zeta} = \int_{PQ} \vec{q}.d\vec{S} = -\phi_Q + \phi_P \qquad (4)$$

لأن التكامل من P الى Q يساوي التكامل من O الى Q مطروحا منه التكامل من O الى P و من (3) ينتج العلاقة (4) .

و لكن من العلاقة التقريبية

$$\phi_Q = \phi_P + \left(\vec{\zeta}.\vec{\nabla}\right)\phi_P \qquad (5)$$

و بالتعويض من (4),(5) ينتج أن

$$-\left(\vec{\zeta}.\vec{q}\right) = \left(\vec{\zeta}.\vec{\nabla}\right)\phi$$

حيث أننا وضعنا $\phi = \phi_P$ لأن P أى نقطة اختيارية عامة .

و لكن هذه العلاقة صحيحة مهما كانت قيمة المتجه الصغير $\vec{\zeta}$. بذلك نستنتج أن

$$\vec{q} = -\vec{\nabla}\varphi = -grad\,\varphi \qquad (6)$$

φ تسمى بداله جهد السرعة . بذلك نستنتج أنه " حيث تكون الحركة غير دورانية فإن الحركة جهدية أى يمكن وضع متجه السرعة على صورة إنحدار لداله قياسية ϕ " و العكس صحيح أى:

" اذا كانت الحركة جهدية أى أن السرعة جهدية أى يمكن وضعها على صورة $\vec{q} = -grad\varphi$ فإن حركة السائل تكون غير دوامية أو غير دورانية . لأن

$$\vec{w} = cur\ell\vec{q} = \vec{\nabla} \wedge \vec{q} = -\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{\nabla}\varphi\right)$$
$$= -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}\varphi = \vec{o}$$

و كما عرفنا سابقا من خواص متجه الإنحدار فإن $\vec{q} = -grad\varphi$ تكون عمودية على السطوح $\varphi =$ ثابت أى سطوح تساوى الجهد .

ب- - نفرض أن الحركة المستوية معطاه بدالة الجهد

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \qquad (1)$$

حيث a ثابت حقيقي موجب أى أن $a > o$ يجب أن نلاحظ انه إذا عرفت φ أمكن معرفة ψ و العكس صحيح إذا أن

$$u = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

و بالتكامل نجد أن

$$\psi = \int \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy + f(x)$$

حيث $f(x)$ دالة في x فقط و بالتعويض عن $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ من

$$\psi = \int 2axdy + f(x)$$

$$= 2axy + f(x)$$

و لتعيين الدالة $f(x)$ (دالة في x فقط) نفاضل (2) بالنسبة الى x فنجد أن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 2ay + f'(x)$$

و لكن

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2ay$$

$$\therefore 2ay = 2ay = f'(x)$$

$$\therefore f'(x) = o \quad \Longrightarrow f(x) = const.$$

و بالتعويض في (2) نجد أن

$$\psi = 2axy + const.$$

و بما أن الثابت إختياري فيمكن أخذ ψ بالصورة

$$\psi = 2axy$$

∴ معادلة الخطوط الإنسيابية هي $\psi = const.$

أى هي $xy = c$

حيث c ثابت .

أى ان مجموعة الخطوط الإنسيابية عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة خطوطها التقريبية هي محاور الأحداثيات.

و إذا كانت $c > o$ فإن x, y تكونان موجبتين معا أو بسالبتين معا و يتبع فرعا القطع الزائدة في الربعين الأول و الثالث.

و إذا كانت $c < o$ فإن فرعي القطع الزائد يقعان في الربعين الثاني و الرابع.

و إذا كانت $c = o$ فإن خطوط الإنسيابية يمثلها محورا الاحداثيات $x = o, y = o$ و تسمى عندئذ بالخطوط الإنسيابية الصفرية (أى المناظرة للقيمة $c = o$) و النقطة التى تكون عندها السرعة مساوية الصفر تسمى بالنقطة الحرجة.

و لإيجاد إتجاه الإنسياب نعتبر نقطة ما M على محور x حيث $x > o$, $y = o$ عند هذه النقطة يكون

$$u_M = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_M = (-2ax)_M < o$$

$$v_M = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_M = o$$

اى أن السرعة عند M تكون في الإتجاه السالب لمحور x و يكون الإنسياب كما في الشكل (1) و إذا ساوينا φ بثابت نحصل على منحنيات تساوي الجهد و هي:

$$a(x^2 - y^2) = const.$$

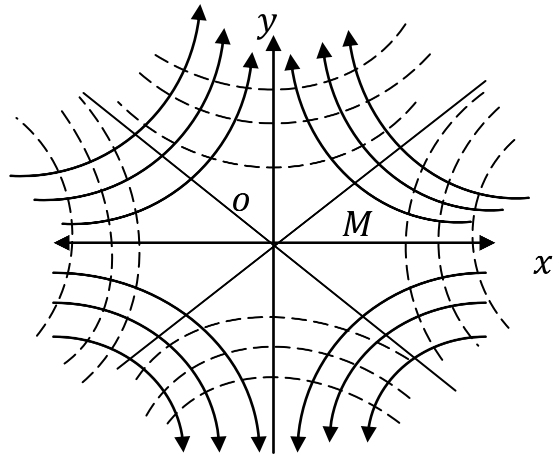
وواضح أنها عبارة عن مجموعة من القطوع الزائدة تتعامد مع المجموعة $xy = c$ أى مع مجموعة الخطوط الإنسيابية.

و خطوط تساوي الجهد مبينة في شكل (1) بخطوط منقطة.

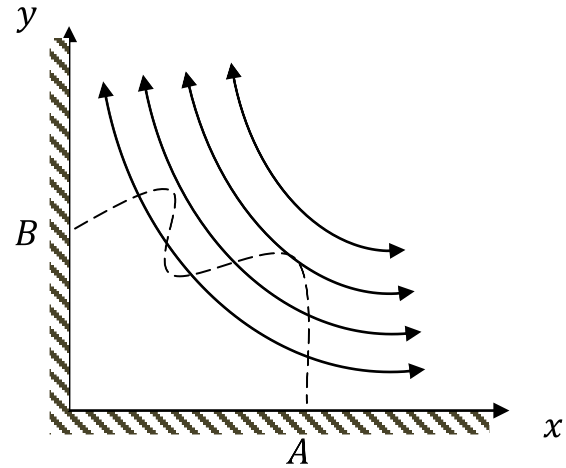
و إذا اخذنا الجزئين الموجبين من المحورين السيني و الصادي (و هي الخطوط الإنسيابية الصفرية) كحائطين صلبين (كمستويين جاسئين) و هذا يمكن عمله دائما في حالة المائع المثالي بسبب عدم وجود اللزوجة, فإن الإنسياب تحت الأعتبار

$$\varphi = a(x^2 - y^2)$$

يمثل إنسيابا داخل زاوية قائمة كما في شكل (2) .



شكل (1)



شكل (2)

و لنبحث الآن تدفق المائع خلال منحنى إختياري AB حيث نهايتاه هما , $B(o,y)$ $A(x,o)$ واضح أن في هذه الحالة يكون:

$$Q = \psi_A - \psi_B = (2axy)_A - (2axy)_B = o$$

و هذا ما يجب ان يكون إذا أن A,B تتعامد مع الخط الإنسيابي و الذي يشمل خطين مستقيمين أى أن حجم المائع الذي يدخل خلال فترة زمنية ما خلال المنحنى AB في المنطقة AoB يساوي حجم المائع الخارج من هذه المنطقة نفسها خلال الفترة الزمنية.

أنتهت الأجابة

نموذج الأسئلة

جامعة بنها	**الفرقة الرابعة رياضيات**	**الفصل الثانى 2013/2012**
كلية علوم بنها	**ديناميكا الموائع**	**الزمن 3 ساعات**
قسم رياضيات	**نظام قديم**	**الأربعاء2013/5/29**

أجب عن خمسة أسئلة فقط مما يلى :- (الدرجه الكلية 120درجة موزعة بالتساوى)

1-أكتب ماتعرفه باختصارعن :- طرق دراسة حركة الموائع- الصور المختلفة لمعادلة الأتصال .

ب-اذا كانت r,θ,φ احداثيات كروية قطبية .أثبت أن السرعة المعطاة بالصورة$\vec{q} = -\vec{\nabla}\phi$

حيث $\phi = -U(r + \frac{a^3}{2r^2})\cos\theta$ تمثل حركة ممكنة للسائل.أثبت أن الحركة غير دورانية.

2- أ- اذكر ماتعرفه عن :- المائع المثالى- الدوامة –الحركة الجهدية .

ب – اذا كانت مركبات السرعة لمائع غير قابل للأنضغاط هى$u = -\omega y, v = \omega x, w = 0$

حيث ω ثابت ,ادرس الحركة من حيث هل الحركة ممكنة- دورانية- معادلة خطوط الأنسياب- خطوط المسار.

3- أ-أكتب ماتعرفه باختصارعن :-الشروط الأبتدائية والشروط الحدية على السطوح الصلبة للموائع- طاقة حركة مائع يتحرك حركة غير دورانية.

ب-كرة نصف قطرها a تتحرك بسرعةU فى سائل ساكن , اذا كانت الحركة غير دورانية أستنتج دالة جهد السرعة ,ثم أثبت أن طاقة حركة السائل هى $\frac{1}{4} MU^2$ حيث M كتلة السائل المزاح .

4- أ-أكتب بدون برهان :- معادلات حركة مائع غير لزج(معادلات أويلر)-معادلة برنولى – تكامل لاجرانج كوشى .

ب- اذا دار مائع كجسم متماسك بسرعة زاوية ثابتة ω حول محور z الرأسى وكانت قوة الجاذبية الأرضية هى القوة الوحيدة الخارجية المؤثرة على المائع .أوجد الضغط الواقع على المائع .

5-أ-عرف الحركة فى بعدين ثم استنتج العلاقة بين دالة الأنسياب ψ وفيض المائع Q خلال أى منحنى .

ب–ادرس حركة المائع الذى دالة جهد السرعة له هى $\varphi = ax + by$ حيث a, b عددان حقيقيان موجبان ثابتان,موضحا خطوط الأنسياب- خطوط تساوى الجهد – مركبات السرعة فى اتجاه المحورين ومحصلتهما وكذلك اتجاهها- ماذا يمثل هذا الأنسياب مع الرسم .

6-أ- أثبت أنه اذا كانت الحركة غير دورانية فان الحركة الناتجة تكون جهدية والعكس صحيح.

ب – ناقش حركة المائع الذى دالة جهد السرعة له على الصورة$\varphi = a(x^2 - y^2)$ حيث aعدد حقيقى موجب$a > 0$ مبينا خطوط الأنسياب واتجاهها- خطوط تساوى الجهد – خط الأنسياب الصفرى – ماذا يمثل هذا الأنسياب مع الرسم .

....

مع أطيب تمنياتى بالتوفيق **ا.د/ محمود عبد العاطى**