جامعة بنها – كلية العلوم – قسم الرياضيات

لطلاب المستوى الأول

يوم الامتحان: الاربعاء 26 / 8 / 2017 م

المادة : رياضيات عامة (1) (100 ر)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال عبدالغنى

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

اسئله + نموذج إجابه

ورقة كاملة

رياضيات عامة (1) (100 ر) لطلاب المستوى الأول

أجب على الاسئله التاليه (الدرجة الكلية 80 درجة)

السؤال الأول (30 درجة) :-

1- **أثبت** صحة العلاقة التالية بطريقة الأستنتاج الرياضي:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

عين الكسور الجزئية للدالة الكسرية التالية:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

2- أوجد جذور المعادلة :

$$x^4-3x^3+7x^2+21x-26=0$$

إذا علم أن $2+3i$ جذر لها .

3- **أوجد** قيمة النهاية الأتية:

I. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ II. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

السؤال الثانى (25 درجة) :-

1- **أوجد** الأربعة حدود الأولى فى المفكوك $(1+x^2)^{-1}$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

2- **عين** $\frac{dy}{dx}$ للدوال الأتية :

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

III. $y=\sin^4(2x^2+1)$

3- **أوجد** مفكوك مكلورين للدالة :

$$y=\sin x$$

انظر خلف الورقة

جـــامعة بنـــــها
كلـية الـــــعلوم
قسم الرياضيات

نموذج اجابة امتحان
رياضيات عامة (1) (100 ر)
التاريخ: 2017/8/26

<u>السؤال الثالث (25 درجة)</u> :-

1- **أوجد** مشتقة الدالة $f(x) = 3x^3 + 4$ عند النقطة x بأستخدام التعريف.

2- **عين** المعكوس للمصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

3- **عين** فترات التزايد والتناقص والتقعر وكذلك النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة :

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 20$$

4- **أحسب** التكاملات الاتية:

I. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^3} dx$

II. $\int \sin^{\frac{1}{3}}(x) \cos^3(x) dx$

....

انتهت أسئلة
مع أطيب تمنياتى بالتوفيق والنجاح
د/ محمد السيد عبدالعال

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات عامة (1) (100 ر) لطلاب المستوى الأول

(الدرجة الكلية 80 درجة)

اجابة السؤال الأول (30 درجة) :-

1- أثبت صحة العلاقة التالية بطريقة الأستنتاج الرياضي:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

الحــــــــــــــل

1- في حالة $n=1$ نجد أن

الطرف الأيمن $1=\frac{1}{6}(2)(3)=$

الطرف الأيسر $1=1^2=$

الطرفان متساويان. إذن العلاقة صحيحة عندما $n=1$

2- نفرض صحة العلاقة عندما $n=k$ أي أن

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) \qquad (1)$$

ونحاول اثبات صحة العلاقة عندما $n=k+1$ وذلك باستخدام العلاقة (1) أى اثبات أن

$$\boxed{1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)\,???}$$

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\
&=(k+1)\left(\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(k(2k+1)+6(k+1)\big)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)\left(2k^2+7k+6\right)\\
&=\frac{1}{6}(k+1)\big(k+2)(2k+3\big)
\end{aligned}$$

. إذن الطرفان متساويان عندما $n=k+1$ وهذا يساوي الطرف الأيمن من العلاقة المطلوب اثبات صحتها عندما نضع $n=k+1$. وبالتالي تكون العلاقة صحيحة لكل قيم n .

==

2- **عين** الكسور الجزئية للدالة الكسرية التالية:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}$$

الحـــــــــــــــل

بأجراء الكسور الجزئية على الكسر كالتالى:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

وبضرب الطرفين فى المقام نحصل على :

$$3x^2-x+1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$

بوضع $x=-1$ نحصل مباشرتاَ على قيمة $A=\frac{5}{2}$ وبالتالى يكون الناتج بعد مقارنة المعاملات:

$$3=\frac{5}{2}+B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$

$$-1=B+C\Rightarrow C=-\frac{3}{2}$$

من ثم نحصل على الكسور الجزئية كالتالى:

$$\frac{3x^2-x+1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{5}{2(x+1)}+\frac{x-3}{2(x^2+1)}$$

==

3- أوجد جذور المعادلة :

$$x^4-3x^3+7x^2+21x-26=0$$

إذا علم أن $2+3i$ **جذر لها .**

الحــــل : حيث أن $2+3i$ جذر مركب للمعادلة ذات المعاملات المركبة فإن $2-3i$ أيضاً جذر لها . نفرض أن الجذرين الآخرين هما a,b . باستخدام العلاقتين الأولى والأخيرة من علاقات فييتا نحصل على

$$(2+3i)+(2-3i)+a+b=-(-3)=3$$

$$\therefore a+b=-1 \qquad (1)$$

(2) $$13ab=-26 \Rightarrow \therefore ab=-2$$

$$(2+3i)\cdot(2-3i)\cdot a\cdot b=-26$$

نجد أن (2) في المعادلة (1) من المعادلة bبالتعويض عن قيمة

$$a(-1-a)=-2 \Rightarrow (a+2)a-1)=0$$

$a=1$ أو $\therefore a=-2$

وبالتالي$b=1$ أو $\therefore b=-2$

إذن جذور المعادلة هي

$$(2+3i),(2-3i),-2,1$$

==

4- أوجد قيمة النهاية الأتية:

II. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ II. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$

الحـــــــــــل

I. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2$$

II. $\displaystyle ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

أجابة السؤال الثانى (25 درجة) :-

1- أوجد الأربعة حدود الأولى فى المفكوك $(1+x^2)^{-1}$ باستخدام نظرية ذات الحدين.

الحـــــــــــل

باستخدام مفكوك ذات الحدين نجد ان :

$$(1+x^2)^{-1}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

==

2- عين $\frac{dy}{dx}$ للدوال الأتية :

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

III. $y=\sin^4(2x^2+1)$

الحـــــــــــل

I. $y=(2+\sec x)^{\tan x}$

بأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على

$$\ln y=\tan x\cdot\ln(2+\sec x)$$

$$\frac{y'}{y}=\tan x\cdot\frac{\sec x\tan x}{2+\sec x}+\sec^2 x\cdot\ln(2+\sec x)$$

بضرب طرفي المعادلة الســـــابقة في $y=(2+\sec x)^{\tan x}$ نحصل

على المشتقة المطلوبة

$$y'=\left[\frac{\sec x\tan^2 x}{2+\sec x}+\sec^2 x\cdot\ln(2+\sec x)\right]\cdot(2+\sec x)^{\tan x}$$

=-=-=-=-====---===--=-=-=-=-=-=

II. $y=e^{\cos(\sqrt[3]{x})}$

$$\because\ y=e^{\cos\sqrt[3]{x}}=e^{\cos x^{\frac{1}{3}}}\Rightarrow\therefore\ y'=e^{\cos\sqrt[3]{x}}\cdot(-\sin\sqrt[3]{x})\cdot\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}$$

==============

.III $y=\sin^4(2x^2+1)$

$$y'=4\sin^3(2x^2+1)\,.\,4x$$

==

3- أوجد مفكوك مكلورين للدالة :

$$y=\sin x$$

الحـــــــــــــل

إذا كانت $y=f(x)=\sin x$ فيكون لدينا

$$f(x)=\sin x\,,\ f'(x)=\cos x\,,\ f''(x)=-\sin x$$

$$f'''(x)=-\cos x\,,\ f''''(x)=\sin x\,,\dots$$

$$f(0)=0\,,\ f'(0)=1\,,\ f''(0)=0\,,\ f'''(0)=-1\,,\dots$$

وحيث أن $f^{(4)}(x)=\sin x$ فإن القيم $0,1,0,-1$ سوف تتكرر بنفس الترتيب إذن منمفكوك مكلورين نجد أن

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

هذه المتسلسلة تقاربيه أيضاً لجميع قيم x .

أجابة السؤال الثالث (25 درجة) :-

1- أوجد مشتقة الدالة $f(x)=3x^3+4$ عند النقطة x بأستخدام التعريف.

الحـــــــــــــل

$$f(x+\Delta x)=3(x+\Delta x)^3+4$$

$$=3[x^3+3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3]+4$$

$$\therefore \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{9x^2(\Delta x)+9x(\Delta x)^2+9(\Delta x)^3}{\Delta x}$$

$$=9x^2+9x(\Delta x)+9(\Delta x)^2$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\left[9x^2+9x(\Delta x)+9(\Delta x)^2\right]=9x^2$$

==

2- عين المعكوس للمصفوفة:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

الحـــــــــــــل

أولاً: نوجد مصفوفة محددات العناصر وهي

$$\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & -7 & 8\\ 5 & 3 & -7\end{bmatrix}$$

ثانياً: نوجد مدور هذه المصفوفة

$$A_{adj}=\begin{bmatrix}0 & 5 & 5\\ 5 & -7 & 3\\ 5 & 8 & -7\end{bmatrix}$$

ثالثا: نوجد قيمة محددة المصفوفة

$$|A|=25$$

$$\therefore A^{-1}=\frac{A_{adj}}{|A|}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{3}{25}\\ \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & -\frac{7}{25}\end{bmatrix}$$

وللتأكد من صحة هذا المعكوس نوجد

$$A^{-1}A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{7}{25} & \frac{3}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{8}{25} & -\frac{7}{25} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

-==-=-=-=-=-=-=-=--=-=-==-=-=-=-=

3- عين فترات التزايد والتناقص والتقعر وكذلك النهايات العظمى والصغرى ونقط الانقلاب للدالة :

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x - 20$$

الحـــل :

بتفاضل الدالة مرتين نحصل على

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$y'' = 6x + 6$$

الدالة تكون تناقصية عندما $y' < 0$ أي عندما

$$3(x+3)(x-1) < 0 \Rightarrow (x+3) < 0 \quad , \quad (x-1) > 0$$

$$or\ (x+3) > 0 \quad , \quad (x-1) < 0$$

أو المتباينات $x < -3\ ,\ x > 1$ تحقق المتباينات x أي أن

المتباينتان الأوليتان ليس لهما حل بينما حل المتباينتين $x > -3\ ,\ x < 1$.

التي تحقق x الثانيتين يوضح أن الدالة المعطاة تكون تناقصية لجميع قيم

وبالتــــالي $(-3,1)$ أي أن الدالة تناقصية في الفترة $-3 < x < 1$ المتباينة

تكون الدالة تزايدية في الفترة $(-\infty,-3), (1,\infty)$

لإيجاد النقاط الحرجة نضع $y' = 0$ فنجد أن النقط الحرجة هي

$$x = -3 \qquad , \qquad x = 1$$

وبالتعويض في معادلة الدالة نجد أن الاحداثيان الصاديان هما

$$y = 7 \qquad , \qquad y = -25$$

إذن النقطتان الحرجتان للدالة هما

$$A(-3,7) \qquad , \qquad B(1,-25)$$

ولمعرفة ما إذا كانت توجد نهاية عظمى أو صغرى عند أيا منهما نوجد قيمة

المشتقة الثانية عند كل منهما نجد أن

عند النقطة A نجد أن

$$y''\big|_{x=-3} = -18+6 = -12 < 0$$

$\therefore$ عند النقطة $A(-3,7)$ تمثل قيمة عظمى للدالة .

عند النقطة B نجد أن

$$y''\big|_{x=1} = 6+6 = 12 > 0$$

$\therefore$ عند النقطة $B(1,-25)$ تمثل قيمة صغرى للدالة .

لإيجاد نقاط الانقلاب نضع المشتقة الثانية تساوي الصفر نجد أن

$$y'' = 6x+6 = 0 \Rightarrow \therefore x = -1$$

بالتعويض في معادلة الدالة نجد أن الاحداثي الصادي يساوي $y = -9$

$\therefore$ نقطة الانقلاب هي $(-1,-9)$

ولتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة نجد أن $y'' > 0$ عندما $x > -1$

أي أن منحنى الدالة مقعر لأعلى في الفترة $(-1,\infty)$

ويكون الرسم $(-\infty,-1)$ وبالمثل يكون منحنى الدالة مقعر لأسفل في الفترة

4- أحسب التكاملات الاتية:

I. $\int \frac{x^3-2x+5}{x^3} dx$

II. $\int \sin(x)\, cos^3(x) dx$

الحـــل

$$\int \frac{x^3-2x+3}{x^3} dx = \int (1-2x^{-2}+3x^{-3}) dx$$

$$= x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$$

$$\int \sin^{1/3} x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{1/3} x \cos^2 x \cdot \cos x\, dx$$

$$= \int \sin^{1/3} x (1-\sin^2 x)\, d\sin x$$

$$= \frac{3}{4}\sin^{4/3} x - \frac{3}{10}\sin^{10/3} x + c$$

==