جامعة بنـها ـ كلية العلوم – قسم الرياضيات

المستوى: الأول

يوم الامتحان: الثلاثاء ١٠ / ٦ / ٢٠١٧ م

المادة : رياضيات عامه (٢) (١٠٥ ر)

الممتحن: د . / محمد السيد عبدالعال

مدرس بقسم الرياضيات بكلية العلوم

نموذج إجابه

ورقة كامله

رياضيات عامة (٢) (١٠٥ ر) لطلاب المستوى الأول

أجب على الاسئله التاليه (الدرجة الكلية ٨٠ درجة)

السؤال الأول (28 درجة) :-

a) **أحسب قيمة "أربعة فقط" من التكاملات التالية** (16 درجة)

$$1-\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx,\qquad 2-\int \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{3}dx,\qquad 3-\int\frac{x+\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$4-\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}\,,\qquad 5-\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\;dx$$

b) **أحسب** المساحة المحصورة بين القطع المكافىء $y=(x-2)^2$ والمستقيم $y=x$. **(6 درجات)**

c) أثبت أن الدائرتين:

$$S_1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-x+3y=10,$$

$$S_2=x^2+y^2+4x+4y=-28$$

تتقاطعان على التعامد **وأوجد** معادلة الوتر المشترك لهما . **(6 درجات)**

السؤال الثانى (28 درجة) :-

a) **أحسب** قيمة "أربعة فقط" من التكاملات التالية : (16 درجة)

$$1-\int\frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx,\qquad 2-\int\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx\,,\qquad 3-\int\frac{dx}{4+5\sin x}$$

$$4-\int e^x\sin x\;dx\;,\qquad 5-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4\cos^3 x\sin^2 x\,dx$$

b) **عين** احداثيات المركز والبؤرتين ومعادلتى الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص $12x^2+27y^2-144x+216y+432=0$ مع رسم القطع. **(8 درجات)**

c) **أوجد** الزاوية بين المستقيم الواصل من النقطة $A(2,3,5)$ الى النقطة $B(6,-2,2)$ و المستقيم الواصل من النقطة $C(-2,2,8)$ الى النقطة $B(4,1,6)$. **(4 درجات)**

السؤال الثالث (24 درجة) :-

a) **أوجد** احداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة المحور والدليل للقطع المكافىء $\frac{3}{2}x^2 + 12y - 6x = 6$ مع رسم القطع. **(8 درجات)**

b) **أوجد** مركز ونصف قطر الدائرة $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4x - 5y = \frac{-21}{2}$ ثم **أوجد** طول المماس المرسوم من النقطة $(3,0)$ **وكذلك** معادلة المماس المرسوم من النقطة $(-2,1)$ الواقعة عليها . **(8 درجات)**

c) **أكتب** معادلة القطع الزائد $\frac{9}{5}x^2 - 5y^2 = 45$ فى الصورة القياسية **وأوجد** طولا محوريه القاطع والمرافق وطول الوتر البؤرى العمودى واحداثيات البؤرتين ومعادلتى الخطين التقاربيان مع رسم القطع.
(8 درجات)

....

انتهت أسئلة

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح

د. مصطفى حسن

د. عمرو سليمان

د. محمد السيد

د. هبة فتحى

نموذج اجابه لأمتحان رياضيات عامة (٢) (١٠٥ ر) لطلاب المستوى الأول

(الدرجة الكلية ٨٠ درجة)

السؤال الأول

a) أحسب قيمة "أربعة فقط" من التكاملات التالية (16 درجة)

$$1-\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx,\qquad 2-\int \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{3}\,dx,\qquad 3-\int \frac{x+\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$4-\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}},\qquad 5-\int \cos^3 x\sqrt{\sin x}\,dx$$

الحـــــــــــــل

$$1-\int \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx = 3\int \sin u\,du = -3\cos\sqrt[3]{x}+c$$

$$2-\int \sin\frac{x}{2}\,\sin\frac{x}{3}\,dx=\int \sin(x/2)\sin(x/3)\,dx=\frac{1}{2}\int[\cos(x/2-x/3)x-\cos(x/2+x/3)]dx]$$

$$=\frac{1}{2}\int[\cos(x/6)-\cos(5x/6)]dx]=\frac{6}{2}[\sin(x/6)-\frac{1}{5}\sin(5x/6)]+c$$

$$3-\int \frac{x+\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\int\frac{-x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\int \sin^{-1}x\,d\sin^{-1}x-\frac{1}{2}\int\frac{-2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2-\sqrt{1-x^2}+c$$

$$4-\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}$$

الحــــل : باستخدام التعويض $x=5\sec u$ نجد أن

$$x^2\sqrt{x^2-25}=125\sec^2 u\sqrt{\sec^2 u-1}=125\sec^2 u\tan u$$

$$dx=5\sec u\tan u\,du$$

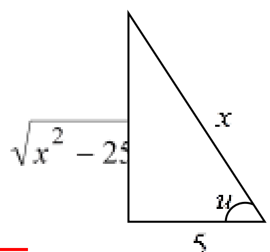
بالتعويض في التكامل نحصل على

$$K=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}=\int\frac{5\sec u\tan u\,du}{125\sec^2 u\tan u}=\frac{1}{25}\int\frac{du}{\sec u}$$

$$=\frac{1}{25}\int\cos u\,du=\frac{1}{25}\sin u+c$$

نحصل على u وباستخدام مثلث الزاوية $\sec u=x/5$ ومن التعويض المستخدم نجد أن

$$K=\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-25}}=\frac{\sqrt{x^2-25}}{25x}+c$$



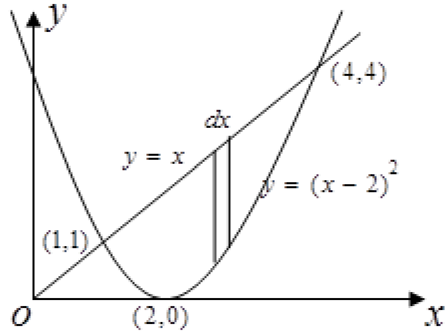
$$5-\int\cos^3 x\sqrt{\sin x}\;dx=\int\cos^2 x\sqrt{\sin x}\;d(sinx)=$$

$$=\int(1-\sin^2 x)\sqrt{\sin x}\;d(sinx)=\sin^{\frac{3}{2}}x-\sin^{\frac{7}{2}}x+c$$

b) **أحسب** المساحة المحصورة بين القطع المكافىء $y=(x-2)^2$ والمستقيم $y=x$.   **(8 درجات)**

<u>الحـل :</u> بحل معادلتي القطع والمستقيم معاً نجد أن نقطتي تقاطعهما هما $(1,1),(4,4)$

ونلاحظ أن رأس القطع هي النقطة $(2,0)$ ومحوره يوازي محور الصادات وفتحته إلى أعلى ٠



المطلوبة تساوي A من قانون المساحة المحصورة بين منحنيين نجد أن قيمة المساحة

$$A=\int_a^b [y_1-y_2]dx=\int_1^4 [x-(x-2)^2]dx=\frac{9}{2}$$

c) أثبت أن الدائرتين:

$$S_1=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-x+3y=10,$$

$$S_2=x^2+y^2+4x+4y=-28$$

تتقاطعان على التعامد **وأوجد** معادلة الوتر المشترك لهما . **(6 درجات)**

الحـــــــــــــل

$$S_1=x^2+y^2-2x+6y=20,$$

$$S_2=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2x+2y=-14$$

$$f_1=-1 \quad , \quad g_1=3 \quad , \quad c_1=-20$$

$$f_2=2 \quad , \quad g_2=2 \quad , \quad c_2=28$$

$$\therefore 2f_1f_2+2g_1g_2=2(-1)(2)+2(3)(2)=8$$

$$\therefore c_1+c_2=-20+28=8$$

$$\therefore 2f_1f_2+2g_1g_2=c_1+c_2$$

إذن الدائرتان متقاطعتان على التعامد. ولإيجاد معادلة الوتر المشترك نطرح معادلتي الدائرتين فنحصل على

$$S_1-S_2=-6x+2y-48=0 \qquad \therefore y=3x+24$$

هى معادلة الوتر المشترك .

=============

السؤال الثانى (28 درجة) :-

a) **أحسب** قيمة "**أربعة فقط**" من التكاملات التالية : **(16 درجة)**

$$1-\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx, \qquad 2-\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx, \qquad 3-\int \frac{dx}{4+5\sin x}$$

$$4-\int e^x \sin x \; dx \;, \qquad 5-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos^3 x \sin^2 x \, dx$$

الحل

$$1-\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}dx=\int \frac{\cos x}{\sqrt{1+2\cos^2 x}}dx=\int \frac{d\sin x}{\sqrt{3-2\sin^2 x}}=\int \frac{du}{\sqrt{3-2u^2}}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{3}}\right)+c$$

$$2-\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx$$

الحــــل :

نحلل الكسر موضوع التكامل إلى كسوره الجزئية :

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

بضرب طرفي المتساوية في المقام المشترك ومساواة البسط في كل من الطرفين نحصل على

$$x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

بمساواة معامل x^2 : $\therefore A+B=0$

الحد المطلق $\therefore A-C=0$

بوضع $x=1$ في الطرفين $\therefore A=1/2$

وبالتالي $B=-A=-1/2 \quad , \quad C=1/2$

بالتعويض في التكامل نجد أن

$$\int \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}dx=\int \frac{1/2}{x-1}dx+\int \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x-1)-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+c$$

3 $-\int \frac{dx}{4+5\sin x}$

<u>الحـــل :</u> نلاحظ أن الدالة موضوع التكامل كسرية وتحتوي الدالة المثلثية $\sin x$ ، لذلك نستخدم تعويض نصف الزاوية $u=\tan(x/2)$ فنجد أن

$$dx=\frac{2du}{1+u^2}\qquad,\qquad \sin x=\frac{2u}{1+u^2}$$

بالتعويض في التكامل المطلوب حسابه نحصل على

$$\int\frac{dx}{4+5\sin x}=\int\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{4+5\frac{2u}{1+u^2}}=\int\frac{du}{(u+2)(2u+1)}=\int\frac{Adu}{(u+2)}+\int\frac{Bdu}{(2u+1)}=$$

$$=A\ln(u+2)+\frac{B}{2}\ln(2u+1)$$

4 $-\int e^x\sin x\ dx$

<u>الحـــل :</u>

$$u=e^x\quad,\quad dv=\sin x\,dx$$
$$\Downarrow\qquad\qquad\Downarrow$$
$$du=e^x dx\qquad v=-\cos x$$

$$\therefore \int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx \qquad (1)$$

نحسب التكامل $\int e^x\cos x\,dx$ باستخدام التكامل بالتجزئ

$$u = e^x \quad , \quad dv = \cos x\, dx$$
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$
$$du = e^x dx \qquad v = \sin x$$

$$\therefore \int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\; dx$$

بالتعويض في التكامل (1) نجد أن

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x \sin x - e^x \cos x\right] + c$$

بالتعويض في التكامل (1) نجد أن

$$\therefore \int e^x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\left[e^x \sin x - e^x \cos x\right] + c$$

$$5 - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^4 \cos^3 x \sin^2 x\, dx = 0$$

b) **عين** احدثيات المركز والبؤرتين ومعادلتى الدليلين والمحورين وأوجد طول الوتر البؤرى العمودى للقطع الناقص $12x^2 + 27y^2 - 144x + 216y + 432 = 0$ مع رسم القطع. **(8 درجات)**

الحــــــــــــــل

الحـــل :

بإكمال المربع في x, y تصبح المعادلة على الصورة

$$4(x^2 - 12x + 36) + 9(y^2 + 8y + 16) = -144 + 144 + 144$$

$$4(x-6)^2 + 9(y+4)^2 = 144$$

بالقسمة على 144 تصبح المعادلة في الصورة النهائية

$$\frac{(x-6)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$$

وبالتالي يكون

$$a^2 = 36 \;\Rightarrow\; \therefore a = 6 \quad , \quad b^2 = 16 \;\Rightarrow\; \therefore b = 4$$

ومن العلاقة $b^2 = a^2(1-e^2)$ نجد أن $e = \sqrt{5}/3$

ومن المعادلة نحصل على

١- المركز هو النقطة $(6,-4)$

٢- البؤرتان هما $(6 \pm ae,-4) = (6 \pm 2\sqrt{5},-4)$

٣- معادلتي الدليلين هما $x = 6 \pm \dfrac{a}{e} = 6 \pm \dfrac{18}{\sqrt{5}}$

٤- معادلة المحور الأكبر هي $y = -4$ ومعادلة المحور الأصغر هي $x = 6$ ٠

٥- طول الوتر البؤري العمودي = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{16}{3}$

==========

c) **أوجد** الزاوية بين المستقيم الواصل من النقطة $A(2,3,5)$ الى النقطة $B(6,-2,2)$ و المستقيم الواصل من النقطة $C(-2,2,8)$ الى النقطة $B(4,1,6)$. **(4 درجات)**

الحـــــــــــل

جيوب تمام اتجاه AB هي

$$l_1 : m_1 : n_1 = \frac{(6-2),(-2-3),(2-5)}{\sqrt{(6-2)^2 + (-2-3)^2 + (2-5)^2}} = \frac{4,-5,-3}{5\sqrt{2}}$$

وجيوب تمام اتجاه CD هي

$$l_2 : m_2 : n_2 = (6,3,-2)/7$$

فإذا كانت θ هي الزاوية بين CD, AB فإن

$$\cos\theta = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = \frac{1}{35\sqrt{2}}[(6)(4) + (-5)(3) + (-3)(-2)]$$

$$= \frac{3\sqrt{2}}{14} = 0.30304$$

$$\therefore\ \theta = 72^\circ\ \ 22'$$

السؤال الثالث (24 درجة) :-

a) **أوجد** احداثيات الرأس والبؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة المحور والدليل للقطع

المكافىء $\frac{3}{2}x^2 + 12y - 6x = 6$ مع رسم القطع. **(8 درجات)**

الحـــــــــــــــل

$$\frac{3}{2}x^2 + 12y - 6x = 6$$
$$x^2 + 8y - 4x = 4$$

بإكمال المربع يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$(x-2)^2 = -8(y-1)$$

نلاحظ أن طول الوتر البؤري العمودي 8 وأن $a=-2$. رأس القطع المكافئ هي النقطة $(2,1)$ والبؤرة $(0,1)$ ومعادلة المحور هي $y=1$ ومعادلة الدليل هي $x=4$ كما موضح في الشكل التالي

===========

b) **أوجد** مركز ونصف قطر الدائرة $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 4x - 5y = \frac{-21}{2}$ ثم **أوجد** طول المماس المرسوم من النقطة $(3,0)$ **وكذلك** معادلة المماس المرسوم من النقطة $(-2,1)$ الواقعة عليها . **(8 درجات)**

الحـــــــــــــــل

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 21 = 0$$

$$\because\ f = 4 \quad , \quad g = -5 \quad , \quad c = 21, \quad r = \sqrt{16+25-21} = 2\sqrt{5} \approx 4.47$$

إذن مركز الدائره هو(-4,5) و نصف قطرها r= ٤.٤٧ . إذا كان طول المماس هو h فإن

$$h^2 = x_1^2 + y_1^2 + 8x_1 - 10y_1 + 21 = 9 + 0 + 24 - 0 + 21 = 54$$
$$\therefore h = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \ .$$

للحصول على معادلة المماس نشتق الدائره بالنسبه x فإن

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 8 - 10\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(4+x)}{(-5+y)} \Rightarrow \therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-2,1)} = \frac{1}{2}$$

معادلة المماس هي $\frac{y-1}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \therefore x - 2y + 4 = 0$

=======

c) أكتب معادلة القطع الزائد $\frac{9}{5}x^2 - 5y^2 = 45$ فى الصورة القياسية وأوجد طولا محوريه القاطع والمرافق وطول الوتر البؤرى العمودى واحداثيات البؤرتين ومعادلتى الخطين التقاربيان مع رسم القطع.

الحـــــــــــل

نكتب معادلة القطع في الصورة القياسية

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad \Rightarrow \quad \therefore a=5 \quad , \quad b=3 \quad , \quad c=\sqrt{25+9}$$

الرأس A هي النقطة $(5,0)$ والرأس A' هي النقطة $(-5,0)$

البؤرة F هي النقطة $(\sqrt{34},0)$ والبؤرة F' هي النقطة $(-\sqrt{34},0)$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

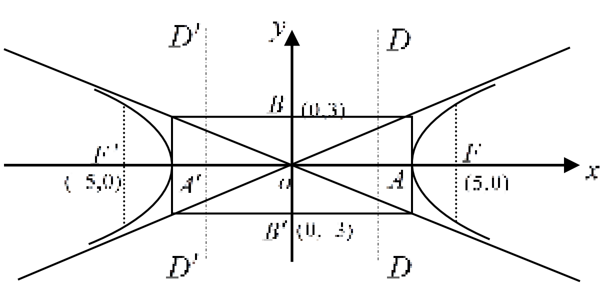
معادلة الدليل DD هي $x=\frac{a}{e}=\frac{25}{\sqrt{34}}$

معادلة الدليل $D'D'$ هي $x=-\frac{a}{e}=-\frac{25}{\sqrt{34}}$

طول الوتر البؤري العمودي يساوي $\frac{2b^2}{a}=2\times\frac{9}{5}=\frac{18}{5}$

معادلتا الخطان التقاربيين هما $y=\pm\frac{b}{a}x$ أي $y=\pm\frac{3}{5}x$

ويبين الشكل التالي القطع الزائد وعليه جميع المعلومات المطلوبة



======