جامعة بنها – كلية العلوم – الفصل الدراسي الأول للعام ٢٠١٣/٢٠١٤

امتحان تخلفات الفرقة الثانيه (لائحة قديمة)– شعبة رياضية وفيزياء

المادة / استاتيكا وتحليل إتجاهي **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية :-

السؤال الأول

أ- أوجد المشتقة الاتجاهية للدالة $\phi = x^2 y + y^2 z + xz^2$ في اتجاه المتجه $\underline{A} = 3\underline{i} + \underline{j} - 3\underline{k}$.

ب- احسب التكامل السطحي للحقل الاتجاهي $\underline{F} = 5y\underline{i} - xz\underline{j} + 3x\underline{k}$ على المساحة داخل الدائرة S التي تقع في المستوى xy ونصف قطرها 2 .

جـ- إذا كان $\underline{A} = 3xyz^2\underline{i} + 2xy^3\underline{j} - x^2 yz\underline{k}$ ، $\phi = 3x^2 - yz$ فأوجد

$$1)\quad \nabla\cdot\underline{A} \qquad ، \qquad 2)\quad \underline{A}\cdot(\nabla\phi)$$

السؤال الثاني

أ- أوجد متجهات الوحدة في نظام الإحداثيات الكرويه وأثبت أنه نظام متعامد .

ب- إذا كانت

$$\psi(r,\theta,\phi) = r^2 \cos\theta \sin n\phi$$

فأوجد $\nabla\psi$.

جـ- احسب التكامل الخطي $\int_\Gamma f(x,y,z)dl$ حيث $f = z^2 - xy$ ، Γ هو الخط المستقيم الموازي لمحور z والمسار من النقطة $A(1,-2,0)$ إلى النقطة $B(1,-2,3)$.

السؤال الثالث

أ- اثبت أن

$$\nabla r^n = n r^{n-2}\underline{r}$$

ب- بإستخدام نظرية جاوس للانتشار احسب $\oint\!\!\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}$ حيث $\underline{F} = 4xz\underline{i} - y^2\underline{j} + yz\underline{k}$ والسطح S هو المكعب الذي تحدده المستويات $x=0\,,\, x=1\,,\, y=0\,,\, y=1\,,\, z=0\,,\, z=1$.

جـ- أوجد متجهات الوحدة في نظام الإحداثيات الأسطوانية وأثبت أنه نظام متعامد .

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة استاتيكا وتحليل إتجاهي تخلفات الفرقة الثانيه شعبة رياضة وفيزياء (لائحة قديمة) كلية العلوم - العام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٣ الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار ٢١ /١٢/٢٠١٣ (ورقه امتحانيه كاملة)

أستاذ المادة د/ مجدي مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول

أ - المشتقة الاتجاهية هي $\frac{d\phi}{dl}=\nabla\phi\cdot\hat{\underline{t}}$

حيث $\hat{\underline{t}}$ متجه الوحدة في اتجاه $\underline{A}$

$$\therefore \hat{\underline{t}}=\frac{\underline{A}}{|\underline{A}|}=\frac{3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k}}{\sqrt{9+1+9}}=\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\left[(2xy+z^2)\underline{i}+(2yz+x^2)\underline{j}+(2xz+y^2)\underline{k}\right]\times\frac{1}{\sqrt{19}}(3\underline{i}+\underline{j}-3\underline{k})$$

$$\frac{d\phi}{dl}=\frac{1}{\sqrt{19}}\left[6xy+3z^2+2yz+x^2-6xz+3y^2\right]$$

ب- يكون من المناسب في هذه المسأله استخدام الإحداثيات الاسطوانية وهو ما ينتج أيضاً من الإحداثيات الكروية عندما $\theta=\pi/2$ وعليه فإن المساحة المستخدمة S يكون لها الفترات $0<r<2$ ، $\theta=\pi/2$، $0<\phi<2\pi$ ، وهذا يؤدي فعلاً إلى الإحداثيات الاسطوانية إذ أن

$$\rho=r\sin\theta=r\,,\,z=r\cos\theta=0\,,\,0<\rho<2\,,\,0<\phi<2\pi$$

ويكون عنصر المساحة والعمود هما

$$da=\rho\,d\rho\,d\phi\quad,\quad\hat{n}=\underline{k}$$

$$\int_S\underline{F}\cdot\hat{n}\,da=\int_0^2\int_0^{2\pi}(5y\underline{i}-xz\,\underline{j}+3x\underline{k})\cdot\underline{k}\,\rho\,d\rho\,d\phi=\int_0^2\int_0^{2\pi}3\rho^2\cos\phi\,d\rho\,d\phi=\int_0^2 3\rho^2d\rho\int_0^{2\pi}\cos\phi\,d\phi=0$$

جـ

$$1)\ \nabla\cdot\underline{A}=\left(\underline{i}\frac{\partial}{\partial x}+\underline{j}\frac{\partial}{\partial y}+\underline{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(3xyz^2\underline{i}+2xy^3\underline{j}-x^2yz\underline{k})$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(3xyz^2)+\frac{\partial}{\partial y}(2xy^3)-\frac{\partial}{\partial z}(x^2yz)=3yz^2+6xy^2-x^2yz$$

$$2)\ \underline{A}\cdot(\nabla\phi)=\underline{A}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}(3x^2-yz)\underline{i}+\frac{\partial}{\partial y}(3x^2-yz)\underline{j}+\frac{\partial}{\partial z}(3x^2-yz)\underline{k}\right]$$

$$=\left[3xyz^2\underline{i}+2xy^3\underline{j}-x^2yz\underline{k}\right]\cdot\left[6x\underline{i}-z\underline{j}-y\underline{k}\right]=18x^2yz^2-2xy^3z+x^2y^2z$$

إجابة السؤال الثاني

أ- في هذه الإحداثيات يكون $u_3=\phi$ ، $u_2=\theta$ ، $u_1=r$

$$x=r\sin\theta\cos\phi\ ,\ y=r\sin\theta\sin\phi\ ,\ z=r\cos\theta$$

$$\therefore\underline{r}=r\sin\theta\cos\phi\underline{i}+r\sin\theta\sin\phi\underline{j}+r\cos\theta\underline{k}$$

$$h_1=\left|\frac{\partial\underline{r}}{\partial r}\right|=\left|\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\underline{j}+\cos\theta\underline{k}\right|=\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi+\cos^2\theta}=1$$

وبالمثل نجد أن $h_2=r\quad,\quad h_3=r\sin\theta$

ومتجهات الوحدة هي

$$\underline{e}_r=\frac{1}{h_1}\frac{\partial \underline{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\phi\underline{i}+\sin\theta\sin\phi\underline{j}+\cos\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_\theta=\frac{1}{h_2}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \theta}=\cos\theta\cos\phi\underline{i}+\cos\theta\sin\phi\underline{j}-\sin\theta\underline{k}$$

$$\underline{e}_\phi=\frac{1}{h_3}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi}=-\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\underline{j}$$

نلاحظ أن $\underline{e}_1\cdot\underline{e}_2=0$ $\quad$ $\underline{e}_3\cdot\underline{e}_1=0$ $\quad$ $\underline{e}_2\cdot\underline{e}_3=0$ أي أن نظام الإحداثيات الكرويه متعامد .

ب- ψ دالة في الإحداثيات الكروية r,θ,ϕ فيكون

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\underline{e}_\phi$$

$$=2r\cos\theta\sin n\phi\underline{e}_r-r^2\sin\theta\sin n\phi\underline{e}_\theta+n\,r\cot\theta\cos n\phi\underline{e}_\phi$$

جـ

حيث أن الخط المستقيم موازي لمحور z فإن

$$\Gamma: x=1\,,\, y=-2\,,\, 0\le z\le 3\,,\, dl=dz$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)dl=\int_0^3\left[z^2-xy\right]_{\substack{x=1\\y=-2}}dz=\int_0^3(z^2+2)\,dz=15$$

إجابة السؤال الثالث

أ-

$$\nabla r^n=\nabla\left\{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right\}^n=\nabla(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$=\underline{i}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}+\underline{j}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}+\underline{k}\frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{n/2}$$

$$=\frac{n}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{n}{2}-1}(2x\underline{i}+2y\underline{j}+2z\underline{k})=n(x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})(x^2+y^2+z^2)^{(n-2)/2}=nr^{n-2}\underline{r}$$

ب- من نظرية جاوس للانتشار

$$\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_v(\nabla\cdot\underline{F})\,dv$$

حيث V هو حجم المكعب ، $\underline{F}$ دالة في x,y,z أي أن

$$\nabla\cdot\underline{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=4z-y$$

$$\therefore\oint_S\underline{F}\cdot\underline{ds}=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}\int_{z=0}^{z=1}(4z-y)dz\,dy\,dx=\int_{x=0}^{x=1}\int_{y=0}^{y=1}(2z^2-yz)_0^1dy\,dx=\int_0^1\frac{3}{2}dx=\frac{3}{2}$$

جـ في هذه الحالة يكون

$$u_1=\rho \quad ، \quad u_2=\phi \quad ، \quad u_3=z$$

$$\underline{r}=x\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k}$$

ولكن معادلات التحويل هي

$$x=\rho\cos\phi\quad,\quad y=\rho\sin\phi\quad,\quad z=z$$

$$\therefore\underline{r}=\rho\cos\phi\underline{i}+\rho\sin\phi\underline{j}+z\underline{k}$$

$$h_1 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho}\right| = \left|\cos\phi \underline{i} + \sin\phi \underline{j}\right| = 1$$
$$h_2 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi}\right| = \left|-\rho \sin\phi \underline{i} + \rho \cos\phi \underline{j}\right| = \rho$$
$$h_3 = \left|\frac{\partial \underline{r}}{\partial z}\right| = \left|\underline{k}\right| = 1$$

أي أن عوامل التدرج هي

$$h_1 = 1 \quad , \quad h_2 = \rho \quad , \quad h_3 = 1$$

ونلاحظ أن

$$0 \le \rho \le \infty \, , \, 0 \le \phi \le 2\pi \, , \, -\infty \le z \le \infty$$

والآن نوجد متجهات الوحدة في حالة الإحداثيات الاسطوانية

$$\underline{e}_\rho = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \rho} = \cos\phi \underline{i} + \sin\phi \underline{j}$$
$$\underline{e}_\phi = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \underline{r}}{\partial \phi} = \frac{1}{\rho}(-\rho \sin\phi \underline{i} + \rho \cos\phi \underline{j})$$
$$= \sin\phi \underline{i} + \cos\phi \underline{j}$$
$$\underline{e}_z = \frac{1}{h_3}\frac{\partial \underline{r}}{\partial z} = \underline{k}$$

ومن الواضح أن

$$\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\phi = \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_z = \underline{e}_\phi \cdot \underline{e}_z = 0$$
