كليه العلوم | عام ٢٠١٣/٢٠١٤ | المستوى الثاني

قسم الرياضيات | المادة : تفاضل وتكامل متقدم (ورقة كاملة) | نموذج اجابة

اجابة السؤال الأول

(أ) إذا كانت $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ فأثبت أن

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

الحـــل:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\, f'\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x}\, f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore\; x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

(أ) أوجد $z_u \, , \, z_v$ إذا كانت $z = x^{\,y} \, , \, x = u^2 + v^2 \, , \, y = u^2 - v^2$

الحـــل

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u} = yx^{y-1}\cdot 2u + x^y \ln x \cdot 2u$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$= yx^{y-1}\cdot 2v + x^y \ln x \cdot (-2v)$$

يمكن تطبيق قاعدة السلسلة في استنتاج القانون المفيد التالي :-

إذا كانت $F(x,y)=c$ وكانت $y=y(x)$ فإن

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow\therefore\frac{dy}{dx}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

إدرس إتصال الدالة الآتية:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{a+b}{x+y}\tan(x+y) & (x,y)\neq(0,0)\\ \\ a+b & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

الحـــل: نبحث الشروط الثلاثة :

(١) نبحث هل الدالة معرفة $\left(f(0,0)\ \ exists\right)$ عند النقطة (0,0):

$f(0,0)=a+b$ الدالة معرفة عند النقطة (0,0) .

كما سبق تبعا للنظرية والنتيجة المعروفة ، نبحث عن وجود النهاية خلال مسارين مختلفين y_1,y_2 يحققان $y_2\to 0$، $y_1\to 0$ ، نوجد النهاية خلال المسار $y_1=x$ (يمر بالنقطة (0,0)):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a+b}{x+y}\tan(x+y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a+b}{2x}\tan(2x)=a+b$$

نوجد النهاية خلال مسارآخر وليكن $y_2=2x$ (يمر بالنقطة (0, 0)) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a+b}{x+y}\tan(x+y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{a+b}{3x}\tan(3x)=a+b$$

نجد أن النهاية موجودة وتساوى $a+b$.

(٣) من الشرطين السابقين نجد أن

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{a+b}{x+y}\tan(x+y) = f(0,0) = a+b$$

من الشروط السابقة نجد أن الدالة متصلة عند (0,0).

اجابة السؤال الثاني

(أ) أوجد النهايات العظمى والصغرى للدالة $z = x + y + \dfrac{a^3}{xy}$

ومدى اعتماد ذلك على قيمة الثابت a ٠

الحـــل

أولاً نوجد النقط الحرجة

$$z_x = 1 - \frac{a^3}{x^2 y} = 0$$
$$z_y = 1 - \frac{a^3}{x y^2} = 0$$

من هاتين المعادلتين واضح أن $y \neq 0 \quad , \quad x \neq 0$

إذن

$$x^2 y - a^3 = 0 \quad , \quad xy^2 - a^3 = 0$$

$$\therefore x^2 y - xy^2 = 0 \Rightarrow xy(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$$
$$\therefore x = y = a$$

وعلى ذلك توجد نقطة حرجة وحيدة وهي (a,a)

$$z_{xx}=\frac{2a^3}{x^3y} \quad , \quad z_{xy}=\frac{a^3}{x^2y^2} \quad , \quad z_{yy}=\frac{2a^3}{xy^3}$$

عند النقطة الحرجة (a,a) تكون

$$z_{xx}z_{yy}-z_{xy}^2=\frac{2}{a}\cdot\frac{2}{a}-\left(\frac{1}{a}\right)^2=\frac{3}{a^3}>0$$

إذا كانت $a>0$ فإن $z_{xx}=\frac{2}{a}>0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية صغرى عند النقطة (a,a) قيمتها

$$z_{\min}=a+a+\frac{a^3}{a^2}=3a$$

إذا كانت $a<0$ فإن $z_{xx}<0$ وبالتالي تكون للدالة نهاية عظمى عند النقطة (a,a) قيمتها

(ب) يراد صنع صندوق قائم مفتوح من أعلى وسعته $256\,cm^3$ أوجد أبعاده بحيث تكون مساحة سطحه أصغر ما يمكن باستخدام طريقة معاملات لاجرنج ؟

<u>الحـــل:</u>

نفرض أن أبعاد الصندوق هي x,y,z حيث z هو الارتفاع وبالتالي يكون حجم الصندوق هو

$$V=xyz=256 \qquad \text{(i)}$$

ومساحة سطح الصندوق هي

$$S=xy+2xz+2yz \qquad \text{(ii)}$$

المطلوب إيجاد النهاية الصغرى للدالة S بحيث يتحقق الشرط بحيث يتحقق الشرط (i) ٠ من (i) لدينا $z=256/xy$ وبالتالي

$$S = xy + \frac{512}{y} + \frac{512}{x}$$

$$S_x = y - \frac{512}{x^2} = 0 \quad , \quad S_y = x - \frac{512}{y^2} = 0$$

بحل هاتين المعادلتين نجد أن $x = y = 8$

$$S_{xx} = \frac{1024}{x^3} \quad , \quad S_{xy} = 1 \quad , \quad S_{yy} = \frac{1024}{y^3}$$

عند النقطة (8,8) تكون

$$S_{xx} S_{yy} - S_{xy}^2 = 4 - 1 > 0$$

حيث $S_{xx} > 0$ ، إذن أصغر مساحة نحصل عليها عندما تكون أبعاد الصندوق هي :

$$x = y = 8 \quad , \quad z = \frac{256}{xy} = 4$$

$$\therefore \; S_{\min} = 64 + 64 + 64 = 192 \; cm^2$$

(ج) إذا كانت $f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$ فأوجد مفكوك $f(3+h, 2+k)$ بدلالة قوى h, k ومن ثم احسب قيمة التغير في الدالة $f(x, y)$ عندما تتغير x من 3 إلى 3.1 وتتغير y من 2 إلى 2.2 ۰

الحـــل

$f(3,2) = 37$	$f(x, y) = x^3 + 2y^3 - xy$
$f_x(3,2) = 25$	$f_x(x, y) = 3x^2 - y$
$f_y(3,2) = 21$	$f_y(x, y) = 6y^3 - x$
$f_{xx}(3,2) = 18$	$f_{xx}(x, y) = 6x$

$$f_{xy}(x,y) = -1 \qquad\qquad f_{xy}(3,2) = -1$$

$$f_{yy}(x,y) = 12y \qquad\qquad f_{yy}(3,2) = 24$$

$$f_{xxx} = 6 \quad , \quad f_{xxy} = 0 \quad , \quad f_{xyy} = 0 \quad , \quad f_{yyy} = 12$$

بالتعويض في المعادلة (11) حيث $a = 3, b = 2$ نجد أن

$$f(3+h, 2+k) = 37 + 25h + 21k + \frac{1}{2!}(18h^2 - 2hk + 24k^2)$$

$$+ \frac{1}{3!}(6h^2 + 12k^3)$$

$$= 37 + 25h + 21k + 9h^2 - hk + 12k^2 + h^3 + 2k^3$$

نضع في طرفي هذا المفكوك $h = 0.1 \, , \, k = 0.2$ نحصل على

$$f(3.1, 2.2) = 37 + 2.5 + 4.2 + 0.09 - 0.02 + 0.48$$
$$+ 0.001 + 0.016 = 44.267$$

$$\Delta f = 44.267 - 37 = 7.267$$

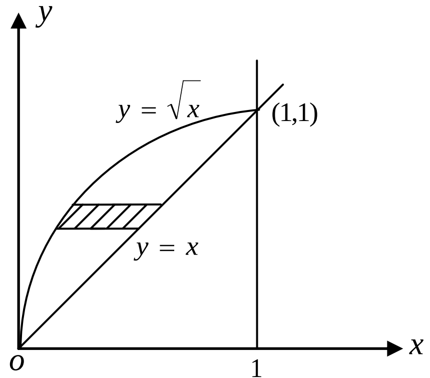
اجابة السؤال الثالث

(أ) احسب قيمة التكامل

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$$

الحــل:

لحساب هذا التكامل يصعب إيجـاد



قيمته إذا بدأنا بالتكامل بالنسبة إلى

y لذلك يلزم تبديل التكامل ،

بأخذ عنصر المســـاحة شـــريحة

أفقية نجد أن

$$y: 0 \to 1$$
$$x: y^2 \to y$$

أي أن

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y} \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (y - y^2) dy$$
$$= \int_0^1 (\sin y - y \sin y) dy$$
$$= -\cos y \Big|_0^1 - (-y \cos y + \int_0^1 \cos y dy)$$
$$= -\cos 1 + 1 - (-y \cos y + \sin y)_0^1$$
$$= 1 - \cos 1 + \cos 1 - \sin 1 = 1 - \sin 1$$

(ب) باستخدام التكامل الثنائي احسب مساحة القطع الناقص

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ثم استنتج مساحة الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ ،

<u>الحـــل:</u>

باستخدام التحويل القطبي للقطع الناقص يتحول القطع الناقص إلى دائرة كما في المثال السابق وبذلك

$$A=\iint_{R} dxdy=ab\iint_{R'} rdrd\theta=4ab\int_{0}^{\pi/2}\int_{0}^{1} rdrd\theta$$
$$=4ab\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=ab\pi$$

وللحصول على مساحة الدائرة من مساحة القطع الناقص نلاحظ أنه إذا كانت $a=b$ فإن القطع يتحول إلى دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها a وعليه يكون $A'=\pi a^2$ وهي مساحة الدائرة المعطاة ٠

(ج) احسب قيمة التكامل

$$\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\int_{0}^{c}(x+y+z)\,dzdydx$$

الحـــل:

$$I=\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)_{0}^{c}dydx=\int_{0}^{a}\int_{0}^{b}\left(cx+cy+\frac{c^2}{2}\right)dydx$$

$$=\int_{0}^{a}\left(cxy+\frac{cy^2}{2}+\frac{c^2y}{2}\right)_{0}^{b}dx=\int_{0}^{a}\left(bcx+\frac{cb^2}{2}+\frac{c^2b}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}a^2bc+\frac{1}{2}ab^2c+\frac{1}{2}abc^2=\frac{1}{2}abc(a+b+c)$$

اجابة السؤال الرابع

(أ) وضح أن المتتابعة الآتية تناقصية:

$$\left\{ \frac{e^n}{(n+1)!} \right\}_1^{\infty} = \frac{e}{2!}, \frac{e^2}{3!}, \frac{e^3}{4!}, \frac{e^4}{5!}, \ldots$$

<u>الحـــل</u>: حيث أن

$$a_n = \frac{e^n}{(n+1)!}, \qquad a_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{(n+2)!}$$

$$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e^{n+1}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{e^n} = \frac{e}{(n+2)} < 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$\therefore$ المتتابعة تناقصية حيث أن $n \geq 1 \quad \forall \quad n+2 < e$.

(ب) إذا كانت

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots.$$

إدرس تقارب وتباعد المتسلسلة؟ وإذا كانت تقاربيه أوجد مجموعها ؟

<u>الحـــل</u> : في هذه المتسلسلة نوجد مجموع أول n حداً هو

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}.$$

لحساب $\lim_{n \to \infty} S_n$ نعيد كتابة S_n في الصورة الآتية :

$$\because \qquad \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 + \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

وبالتالي فإن المتسلسلة تكون تقاربيه.

(ج) اختبر تقارب وتباعد المتسلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2+1}$$

وإذا كانت تقاربيه بين نوع التقارب مشروطا أم مطلقا ؟.

<u>الحـــل:</u> من النظرية السابقة نجد أن الشروط الثلاثة

1) $a_n = \dfrac{1}{n^2+1} > 0 \qquad \forall n > 0,$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n^2+1}\right| = 0,$

3) $\left| a_{n+1} \right| = \frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1} = \left| a_n \right|$

متحققة ، وبالتالي المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ تكون تقاربيه، ولمعرفة نوع التقارب نستخدم اختبارات التقارب والتباعد ، باستخدام اختبار التكامل نجد أن

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^2+1}\right| \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{\left|x^2+1\right|} = \tan^{-1} x \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < \infty$$

إذن التكامل تقاربي والمتسلسلة تقاربيه ، وبالتالي تكون المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^2+1}$ تكون تقاربيه تقارب مطلق.

(د) إوجد فترة التقارب ونصف قطر التقارب للمتسلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

<u>الحل</u>: نصف قطر التقارب للمتسلسلة هو :

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)!|}{|n!|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(n+1)|}{1} = \infty$$

بالتالي المتسلسلة مطلقة التقارب وتكون فترة التقارب هي $(-\infty,\infty)$.