**جامعة بنها**

**كلية العلوم** **الفرقة الثالثة (رياضة) قديم. الفصل الدراسي الأول**

**العام الجامعي ٢٠١٣/ ٢٠١٤**

**المعادلات التفاضلية(٢) (إجــــــــابة) ٢٠١٣/١٢/١٩**

---

**السؤال الأول:**

أ- أذكر الصورة العامة لمعادلات لاجندر التفاضلية.

**الحـــل :** الصورة العامة لمعادلات لاجندر التفاضلية هى:

$$a_0(ax+b)^n y^n + a_1(ax+b)^{n-1} y^{n-1} + a_2(ax+b)^{n-2} y^{n-2} + \dots\dots + a_n y = Q(x) \qquad (2.1)$$

ب- إوجد حل اللمعادلة التفاضلية :

$$(2x-3)^2 y'' - 6(2x-3)y' + 12y = x^2$$

**الحـــل :** المعادلة على صورة معادلة لاجندر حيث أن $a=2, b=-3$

نأخذ التعويض

$$(2x-3)=e^z \;\Rightarrow\; z=\ln(2x-3) \;\Rightarrow\; x=\frac{1}{2}(e^z+3) \qquad (2.8)$$

يمكن كتابتها على الصورة.المعادلة (المعادلة على صورة

$$\left((2x-3)^2 D^2 - 6(2x-3)D + 12\right)y = x^2 \qquad (2.9)$$

هو $\theta$ حيث أن المؤثر $\theta y = \dfrac{dy}{dz}$ ،

$$(2x-3)D = 2\theta\,, \quad (2x-3)^2 D^2 = 4\theta(\theta-1) \qquad (2.10)$$

( نحصل على :2.9) نعوض فى المعادلة (2.10) ، (2.8من المعادلات )

$$[4\theta(\theta-1) - 12\theta + 12 \quad ]y = \frac{1}{4}(e^z+3)^2$$

$$\Rightarrow [4\theta^2 - 16\theta + 12 \quad ]y = \frac{1}{4}(e^z+3)^2$$

$$\Rightarrow [\theta^2 - 4\theta + 3 \quad ]y \;= \frac{1}{16}(e^{2z} + 6e^z + 9) \qquad (2.11)$$

والمعادلة المساعدة هى :

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 3$$

ويكون الحل $y_c$ هو :

$$y_c = c_1 e^z + c_2 e^{3z} \qquad (2.12)$$

والحل الخاص $y_p$ هو :

$$y_p=\frac{1}{\theta^2-4\theta+3}.\frac{1}{16}\left(e^{2z}+6e^z+9\right)$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{2z}}{(-1)}+6e^z\left(\frac{1}{(\theta+1)^2-4(\theta+1)+3}\right)+\frac{9}{\theta^2-4\theta+3}\right)$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{1}{16}\left(\frac{e^{2z}}{(-1)}+6e^z\left(\frac{1}{(\theta+1)^2-4(\theta+1)+3}\right)+\frac{9}{\theta^2-4\theta+3}\right)$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{-1}{16}e^{2z}+e^z\left(\frac{1}{\theta^2-2\theta}\right)+\frac{9}{(\theta-1)(\theta-3)}$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{1}{16}\left(e^{2z}+e^z\left(\frac{9}{\theta(\theta-2)}\right)+\frac{9}{3}(1-\theta)^{-1}\left(1-\frac{\theta}{3}\right)^{-1}\right)$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{1}{16}\left(-e^{2z}+e^z(2-\theta)^{-1}z+3\left(1+\theta+\vartheta^{2.}+\ldots\right)\left(1+\frac{\theta}{3}+\frac{\theta^{2.}}{9}+\ldots\right)\right)$$

$$\Rightarrow\ y_p=\frac{1}{16}\left(-e^{2z}+\frac{e^z}{2}\left(1+\frac{\theta}{2}+\frac{\theta^{2.}}{4}+\ldots\right)z+3\left(1+\frac{4}{3}\theta+\frac{13}{9}\theta^2+\ldots\right)\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(-e^{2z}+\frac{e^z}{2}\left(z+\frac{1}{2}+1+\ldots\right)+3\right)$$

$$=\frac{1}{16}\left(-e^{2z}+\frac{e^z}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)+3\right)$$

وبالتالى يكون لدينا الحل العام $y_G$ الآتى :

$$y_c=c_1e^z+c_2e^{3z}+\frac{1}{16}\left(-e^{2z}+\frac{e^z}{2}\left(z+\frac{1}{2}\right)+3\right)$$

وبالتعويض عن قيمة $z=\ln(2x-3)$ نحصل على :

$$y_G=c_1(2x-3)+c_2(2x-3)^3$$
$$+\frac{1}{16}\left(-(2x-3)^2+\frac{(2x-3)}{2}\left(\ln(2x-3)+\frac{1}{2}\right)+3\right)$$

$$y_G = c_1(2x-3) + c_2(2x-3)^3$$
$$-\frac{1}{16}(2x-3)^2 + \frac{(2x-3)}{32}\left(\ln(2x-3) + \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{16}$$

**السؤال الثاني:**

إوجد الحل العام لمجموعة المعادلات ا لتفاضلية الآتية :

$$2D\,x + D\,y - 4x - y = e^t$$
$$D\,x + 3x + y = 0, \qquad D = \frac{d}{dt}.$$

الحـــــل : نوجد المؤثر التفاضلى العام للمجموعة

$$F(D) = \begin{vmatrix} 2D-4 & D-1 \\ D+3 & 1 \end{vmatrix} = -D^2 + 4D - 7$$

إذن يوجد لدينا عدد إثنين ثابت إختيارى ،، ويمكن كتابة المعادلتين على الصورة :

$$(2D-4)x + (D-1)y = e^t \qquad (1)$$
$$(D+3)x + y = 0, \qquad . \qquad (2)$$

) نحصل على :1) فى $-(D-1)$ ثم الجمع مع المعادلة (2بضرب المعادلة (

$$[(2D-4) - (D-1)(D+3)]x = e^t$$

$$\Rightarrow [2D - 4 - D^2 - 2D + 3]x = e^t \quad \Rightarrow [D^2 + 1]x = e^t \qquad (3)$$

$$\Rightarrow [D^2 + 1]x = e^t \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm i$$

إذن الحل المكمل $x_c$ هو :

$$x_c = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

والحل الخاص هو $x_p$ :

$$x_p = \frac{1}{D^2 + 1}.e^t = \frac{1}{2}e^t$$

إذن الحل العام $x_G$ هو :

$$x_G = x_c + x_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \frac{1}{2}e^t \qquad (4)$$

) ، وبالتعويض عنه فى 3وهنا نكون قد حصلنا على أول مجهول $x$ وهو الحل العام للمعادلة (
) نحصل على :2المعادلة (

$$
\begin{aligned}
y &= -(D+3)\left(c_1\cos t + c_2\sin t + \frac{1}{2}e^t\right) \\
&= -\left(-c_1\sin t + c_2\cos t + \frac{1}{2}e^t + 3x\right) \\
&= (c_1 - 3c_2)\sin t - (c_2 + 3c_1)\cos t - 2e^t \qquad (5)
\end{aligned}
$$

المعادلات (.5)،(4) هى الحلول العامة المجموعة ، ولتحديد الثوابت نطبق الشروط الإبتدائية

**السؤال الثالث:**

أ- صنف سلوك المعادلات التفاضلية عند النقطة x=0 وكل النقاط الشاذة:

$$1)\ \ x\frac{d^2y}{dx^2} + \sin x\frac{dy}{dx}.x^2y = 0\ ,\ \ 2)\ \ x\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx}.xy = 0,$$

**الحـــــل :** انظر الكتاب المقرر صـ ١٠٢

ب- أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية:

$$x^2y'' - xy' + y = x$$

**الحـــــل :** المعادلة على صورة معادلة كوشى- اويلر ، نأخذ التعويض

$$x = e^z \;\Rightarrow\; z = \ln x \qquad (2)$$

( يمكن كتابتها على الصورة1المعادلة (المعادلة على صورة )

$$\left(x^2D^2 - xD + 1\right)y = x \qquad (3)$$

، $\theta\, y = \dfrac{dy}{dz}$ حيث أن المؤثر $\theta$ هو

$$xD\,y = \theta\, y\ ,\ \ x^2D^2y = \theta(\theta-1)y \qquad (5)$$

( نحصل على :2) نعوض فى المعادلة (3) ، (1من المعادلات )

$$
\begin{aligned}
&[\theta(\theta-1) - \theta + 1\ \ ]y = e^z \\
\Rightarrow &\left[\theta^2 - 7\theta + 12\ \ \right]y = (e^z + 3) \\
\Rightarrow &\left[\theta^2 - 2\theta + 1\ \ \right]y\ \ = e^z \qquad (6)
\end{aligned}
$$

والمعادلة المساعدة هى :

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1\ \ = 0 \qquad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

ويكون الحل $y_c$ هو :

$$y_c = (c_1 + c_2 z)e^z \qquad (7)$$

والحل الخاص $y_p$ هو :

$$y_p = \frac{1}{\theta^2 - 7\theta + 12}.(e^z + 3) = \frac{1}{(\theta - 1)^2}.(e^z)$$

$$\Rightarrow\ y_p = e^z\left(\frac{1}{(\theta - 1 + 1)^2}\right).1 = e^z\left(\frac{1}{\theta^2}\right). = e^z\,\frac{z^2}{2!} = \frac{1}{2}z^2e^z$$

وبالتالى يكون لدينا الحل العام $y_G$ الآتى :

$$y_G = (c_1 + c_2 z)e^z + \left(\frac{1}{2}z^2e^z\right)$$

ثم بالتعويض عن قيمة $z = \ln x$ نحصل على :

$$y_G = (c_1 + c_2 \ln x)x + \frac{x}{2}(\ln x)^2$$

**السؤال الرابع:**

أ- أذكر خصائص كل من: مؤثر الفرق$\Delta$، المؤثر E

**الحـــل :** انظر الكتاب المقرر صـ ١٦٠ ــ ١٦٣

ب-أوجد حل المعادلة التفاضلية الآتية بطريقة متسلسلات القوي

$$\frac{d^2y}{dx^2} - .xy = 0$$

**الحـــل :** انظر الكتاب المقرر صـ ١٠٥

***مع أطيب التمنيات***

***د/أحمد عبدالخالق محمد - كلية العلوم***

***قسم الرياضيات***