جامعة بنها – كلية العلوم - الفصل الدراسي الأول للعام 2019/2018

امتحان المستوى الثالث – شعبة رياضيات

المادة / موضوعات مختارة فى الرياضيات التطبيقية (1) 334 ر **الزمن / ثلاث ساعات**

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوي) :

السؤال الأول

أ- بإستخدام خواص المؤثر التفاضلي ∇ أوجد قيمة $\nabla^2(1/r)$ 0

ب- أوجد الثوابت a,b,c لكي يكون المتجه

$$\underline{v}=(x+2y+az)\underline{i}+(bx-3y-z)\underline{j}+(4x+cy+2z)\underline{k}$$

غير دوراني 0 ثم أوجد دالة الجهد المناظرة للمتجه $\underline{v}$ 0

السؤال الثاني

أ- إذا كانت $\psi(r,\theta,\phi)=r^2\cos\theta\sin n\phi$ فأوجد $\nabla\psi$ 0

ب- أوجد متجهات الوحدة في حالة الإحداثيات الأسطوانية وأثبت أنه نظام متعامد ثم أوجد مركبات السرعة والعجلة منسوبة إلى هذه الإحداثيات 0

السؤال الثالث

احسب التكامل السطحي $\int_S f(x,y,z)da$ حيث $f=xz+3y-z$ والسطح S مكون من نصف اسطوانة محورها محور z ونصف قطر قاعدتها 3 ومستطيل في المستوى xz ونصفي دائرتين في المستويين $z=4\,,\,z=0$ 0 0

السؤال الرابع

أ- بإستخدام نظرية جاوس للإنتشار احسب التكامل السطحي $\int_S \underline{F}\cdot\underline{ds}$ حيث $\underline{F}=x(z\underline{i}+y\underline{j}+z\underline{k})$ والسطح S هو السطح الذي يحد حجم نصف الكرة العلوي $x^2+y^2+z^2\le a^2\,,\,z\ge 0$

ب- حقق نظرية أستوك للمتجه $\underline{A}$ حيث $\underline{A}=(2x-y)\underline{i}-yz^2\underline{j}-y^2z\underline{k}$ على السطح S الذي يكون السطح العلوي للكرة $x^2+y^2+z^2=1$ ، c هي حدودها 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة موضوعات مختارة في الرياضيات التطبيقية (1) 334 ر المستوى الثالث شعبة رياضيات - كلية العلوم العام الدراسى 2019/2018 الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الثلاثاء الموافق 2019/1/22 ورقة إمتحانية كاملة

أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ-

$$\nabla\cdot\nabla r^{-1}=-\nabla\cdot\left[r^{-3}\,\underline{r}\right]=-\left[3r^{-3}-3r^{-3}=0\right]$$

ب-

$$\nabla\wedge\underline{v}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+2y+az & bx-3y-z & 4x+cy+2z\end{vmatrix}=\underline{0}$$

$$\therefore(c+1)\underline{i}+(a-4)\,\underline{j}+(b-2)\underline{k}=\underline{0}\quad\Rightarrow\quad\therefore a=4\,,b=2\,,c=-1$$

$$\underline{v}=(x+2y+4z)\underline{i}+(2x-3y-z)\,\underline{j}+(4x-y+2z)\underline{k}$$

$$\because\ \underline{v}=\nabla\phi$$

$$\therefore\ \frac{\partial\phi}{\partial x}=x+2y+4z\quad\Rightarrow\quad\therefore\phi=\frac{1}{2}x^{2}+2xy+4xz+f_{1}(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=2x-3y-z\quad\Rightarrow\quad\therefore\phi=2xy-\frac{3}{2}y^{2}-yz+f_{2}(x,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=4x-y+2z\quad\Rightarrow\quad\therefore\phi=4xz-yz+z^{2}+f_{3}(x,y)$$

$$\therefore\phi=2xy+4xz-yz+\frac{1}{2}x^{2}-\frac{3}{2}y^{2}+z^{2}$$

إجابة السؤال الثاني

أ- ψ دالة في الإحداثيات الكروية r,θ,ϕ فيكون

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial r}\underline{e}_{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\underline{e}_{\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\underline{e}_{\phi}$$

$$=2r\cos\theta\sin n\phi\,\underline{e}_{r}-r\sin\theta\sin n\phi\,\underline{e}_{\theta}+nr\cot\theta\cos n\phi\,\underline{e}_{\phi}$$

ب- في هذه الحالة يكون $u_{3}=z$ ، $u_{2}=\phi$ ، $u_{1}=\rho$ ، $\underline{r}=x\underline{i}+y\,\underline{j}+z\underline{k}$

ولكن معادلات التحويل هي

$$x=\rho\cos\phi\quad,\quad y=\rho\sin\phi\quad,\quad z=z$$

$$\therefore\underline{r}=\rho\cos\phi\underline{i}+\rho\sin\phi\,\underline{j}+z\underline{k}\quad،\quad h_{1}=1\quad,\quad h_{2}=\rho\quad,\quad h_{3}=1$$

ونلاحظ أن

$$0\le\rho\le\infty\quad,\quad 0\le\phi\le2\pi\quad,\quad -\infty\le z\le\infty$$

والآن نوجد متجهات الوحدة في حالة الإحداثيات الاسطوانية

$$\underline{e}_{\rho}=\frac{1}{h_{1}}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\rho}=\cos\phi\underline{i}+\sin\phi\,\underline{j}\quad,\quad\underline{e}_{\phi}=\frac{1}{h_{2}}\frac{\partial\underline{r}}{\partial\phi}=\frac{1}{\rho}(-\rho\sin\phi\underline{i}+\rho\cos\phi\,\underline{j})=\sin\phi\underline{i}+\cos\phi\,\underline{j}$$

$$\underline{e}_{z}=\frac{1}{h_{3}}\frac{\partial\underline{r}}{\partial z}=\underline{k}$$

ومن الواضح أن $\underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_\phi = \underline{e}_\rho \cdot \underline{e}_z = \underline{e}_\phi \cdot \underline{e}_z = 0$ وهذا يعني أن الإحداثيات الاسطوانية متعامدة 0

$$\because \underline{r} = \rho\cos\phi \underline{i} + \rho\sin\phi \underline{j} + z\underline{k} = \rho \underline{e}_\rho + z\underline{e}_z$$

$$\therefore \underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{e}_\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\underline{e}_\rho}{dt} + \underline{e}_z\frac{dz}{dt} + z\frac{d\underline{e}_z}{dt} = \dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\underline{e}_\phi + \dot{z}\underline{e}_z$$

$$\therefore \underline{f} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\underline{e}_\phi + \dot{z}\underline{e}_z\right]$$

$$= \dot{\rho}\frac{d\underline{e}_\rho}{dt} + \ddot{\rho}\underline{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\frac{d\underline{e}_\phi}{dt} + \rho\ddot{\phi}\underline{e}_\phi + \dot{\rho}\dot{\phi}\underline{e}_\phi + \ddot{z}\underline{e}_z$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\underline{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\underline{e}_\phi + \ddot{z}\underline{e}_z$$

إجابة السؤال الثالث :

نستخدم هنا الإحداثيات الاسطوانية لجميع أجزاء السطح فيما عدا المستطيل حيث يناسبه الإحداثيات الكارتيزية 0 وبذلك يكون لدينا الآتي

1- نصف الاسطوانة

$$\rho = 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad 0 < z < 4 \quad , \quad da_1 = \rho\, d\phi\, dz$$

2- نصف الدائرة السفلي

$$0 < \rho < 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad z = 0 \quad , \quad da_2 = \rho\, d\phi\, d\rho$$

3- نصف الدائرة العلوي

$$0 < \rho < 3 \quad , \quad 0 < \phi < \pi \quad , \quad z = 4 \quad , \quad da_3 = \rho\, d\phi\, d\rho$$

4- المستطيل

$$-3 < x < 3 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad 0 < z < 4 \quad , \quad da_4 = dx\, dz$$

وكما نعلم أنه في الإحداثيات الاسطوانية

$$x = \rho\cos\phi \quad , \quad y = \rho\sin\phi \quad , \quad z = z$$

وعلى ذلك فإن أجزاء التكامل السطحي هي على الترتيب

$$\iint_{S_1} f\, da_1 = \int_0^4\int_0^\pi (3z\cos\phi + 9\sin\phi - z)3\,d\phi\, dz = 3\left[\frac{3}{2}z^2\sin\phi - 9z\cos\phi - \frac{1}{2}z^2\phi\right]_{0,0}^{4,\pi}$$

$$= 3[9(4)(2) - 8\pi] = 24(9-\pi)$$

$$\iint_{S_2} f\, da_2 = \int_0^3\int_0^\pi 3\rho\sin\phi \cdot \rho\, d\rho\, d\phi = \left[\rho^3\right]_0^3\left[-\cos\phi\right]_0^\pi = 54$$

$$\iint_{S_3} f\, da_3 = \int_0^3\int_0^\pi (4\rho\cos\phi + 3\rho\sin\phi - 4)\rho\, d\rho\, d\phi = \left[\frac{4}{2}\rho^3\sin\phi - \rho^3\cos\phi - 2\rho^2\phi\right]_{0,0}^{3,\pi}$$

$$= 27(2) - 18\pi = 54 - 18\pi$$

$$\iint_{S_4} f\, da_4 = \int_0^4\int_{-3}^3 (zx - z)dxdz = \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-3}^3\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^4 = -48$$

ويكون التكامل على السطح كله هو

$$\oint_S f(x,y,z)da = 24(9-\pi) + 54 - 18\pi - 48 = 276 - 42\pi$$

إجابة السؤال الرابع :

أ-
$$\nabla\cdot\underline{F}=z+2x=r\cos\theta+2r\sin\theta\cos\phi \quad , \quad dv=r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$
$$\nabla\cdot\underline{F}\,dv=r^3(\sin\theta\cos\theta+2\sin^2\theta\cos\phi)\,dr\,d\theta\,d\phi$$

حيث

$$0<r<a \quad , \quad 0<\theta<\pi/2 \quad , \quad 0<\phi<2\pi$$

$$\int_V \nabla\cdot\underline{F}\,dv=\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3\left(\sin\theta\cos\theta[\phi]_0^{2\pi}+2\sin^2\theta[\sin\phi]_0^{2\pi}\right)dr\,d\theta=2\pi\int_0^a\int_0^{\pi/2} r^3\sin\theta\cos\theta\,dr\,d\theta$$
$$=2\pi\times\frac{a^4}{4}\times\frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\right]_0^{\pi/2}=\frac{\pi a^4}{4}=\oint_S \underline{F}\cdot\underline{ds}$$

ب- الحدود c للسطح S تكون دائرة في المستوى xy ونصف قطرها الوحدة ومركزها نقطة الأصل لذلك

$$x=\cos\theta \quad , \quad y=\sin\theta \quad , \quad z=0 \quad , \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\oint_c \underline{A}\cdot\underline{dr}=\oint_c\left\{(2x-y)dx-yz^2dy-y^2zdz\right\}=\int_0^{2\pi}(2\cos\theta-\sin\theta)(-\sin\theta)d\theta=\pi \qquad (1)$$

أيضاً

$$\nabla\wedge\underline{A}=\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x-y & -yz^2 & -y^2z\end{vmatrix}=\underline{k}$$

وعلى ذلك يكون

$$\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=\int_S \underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=\int_{x=-1}^{1}\int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$$

حيث $\underline{k}\cdot\underline{n}\,ds=dxdy$ على الدائرة $x^2+y^2=1$

$$\therefore\int_S(\nabla\wedge\underline{A})\cdot\underline{ds}=4\int_0^1\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}}dy\,dx=4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\pi \qquad (2)$$

من (1),(2) تكون نظرية أستوك قد تحققت 0