جامعة بنها- كلية العلوم **المستوى : الثالث** **قسم الرياضيات**

إمتحان نهاية الفصل الدراسي الثاني2018-2019 **المادة:طرق رياضية** **الزمن : ساعتين**

اجب على الأسئلة الآتية

السؤال الأول

إذا كانت $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

فإثبت أن $a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx\ ,n=1,2,3,\ldots$

ثم اوجد متسلسلة فوريير للدالة

$$f(x)=x^2\ ,-\pi<x<\pi$$

السؤال الثاني

1-أوجد تحويل لابلاس للدوال الأتية

$$L\{\cos^2 5t\},\ L\left\{\int_0^t \sin 2u\,du\right\}\quad ,G(t)$$

حيث $G(t)=\begin{cases}\cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right), & t>\frac{2\pi}{3}\\ 0, & t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$

2-باستخدام نظرية الإدماج أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}$$

3-أوجد حل المعادلة التفاضلية الأتية باستخدام تحويل لابلاس مع الشروط المذكورة

$$y''(t)-3y'(t)-4y(t)=3e^t,\quad y(0)=2,y'(0)=-2$$

السؤال لثالث: إثبت ان

$$1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin\theta}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin\theta}\,d\theta=\pi$$

$$2-\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2x-1}\theta\cos^{2y-1}\theta\,d\theta$$

انتهت الأسئلة

تمنياتي لكم بالتوفيق

د.منى الدريني

جامعة بنها- كلية العلوم　　　المستوى : الثالث　　　قسم الرياضيات

نموذج إجابةإمتحان نهاية الفصل الدراسي الثانى2018-2019

المادة:طرق رياضية　الزمن : ساعتين

ج1　$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$

بضرب طرفي المعادلة في $\cos\frac{m\pi x}{L}$ والتكامل بالنسبة لx

$$\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{m\pi x}{L})dx=\int_{-L}^{L}\frac{a_0}{2}\cos\frac{m\pi x}{L}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)dx=0+a_nL+0,m=n$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos(\frac{n\pi x}{L})dx\;,n=1,2,3,\dots,\quad m=n$$

متسلسلة فوريير للدالة

$$f(x)=x^2\;,-\pi<x<\pi$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,dx=\frac{1}{3\pi}(x^3)_{-\pi}^{\pi}=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2cosnxdx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}sinnx\right)_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi}xsinnxdx$$

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi}(xcosnx)_0^{\pi}-\frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}cosnx\,dx=(-1)^n\frac{4}{n^2},b_n=0$$

$$x^2=\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}cosnx$$

ج2- $L\{cos^2 5t\}=\frac{1}{2}L\{1+cos10t\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s}+\frac{s}{s^2+100}\right)$

$$L\left\{\int_0^t sin2udu\right\}=\frac{2}{s(s^2+4)}\qquad,L\{G(t)\}=\frac{se^{\frac{-2\pi s}{3}}}{s^2+1}$$

حيث　$G(t)=\begin{cases}cos\left(t-\frac{2\pi}{3}\right),t>\frac{2\pi}{3}\\ 0\qquad\qquad ,t<\frac{2\pi}{3}\end{cases}$

2-باستخدام نظرية الإدماج أوجد تحويل لابلاس العكسي

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s-2)}\right\}=\int_0^t e^u e^{2(t-u)}\,du=e^{2t}\int_0^t e^{-u}du=e^t(e^t-1)$$

$$y''(t)-3y'(t)-4y(t)=3e^t,\quad y(0)=2,y'(0)=-2$$

$$L\{y''(t)-3y'(t)-4y(t)\}=3L\{e^t\}$$

$$s^2y(s)-sy(0)-y'(0)-3sy(s)+3y(0)-4y(s)=\frac{3}{s-1}$$

$$y(s)=\frac{3}{(s-1)(s-4)(s+1)}+\frac{2}{(s+1)}\to y(t)=L^{-1}\left\{\frac{3}{(s-1)(s-4)(s+1)}+\frac{2}{(s+1)}\right\}$$

$$\frac{1}{(s-1)(s-4)(s+1)}=\frac{A}{(S-1)}+\frac{B}{(S+1)}+\frac{C}{(S-4)},A=-\frac{1}{6},C=\frac{1}{15},B=\frac{1}{10},$$

$$y(t)=\frac{-1}{2}e^{t}+\frac{23}{10}e^{-t}+\frac{1}{5}e^{4t}$$

ج3

$$1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{sin\theta}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sin\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta\to$$

$$2x-1=-\frac{1}{2}\to x=\frac{1}{4},2y-1=0\to y=\frac{1}{2},$$

$$2x-1=\frac{1}{2}\to x=\frac{3}{4},y=\frac{1}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{-\frac{1}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin\theta)^{\frac{1}{2}}d\theta=\frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\beta\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}=\pi$$

$$2-\beta(x,y)=\int_0^{t}t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt\to let\ t=sin^2\theta,dt=2sin\theta cos\theta d\theta$$

$$t=0\to\theta=0,t=1\to\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2\theta)^{x-1}\,(1-sin^2\theta)^{y-1}sin\theta cos\theta d\theta$$

$$\therefore\beta(x,y)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}sin^{2x-1}\theta\,cos^{2y-1}\theta d\theta$$

انتهت الإجابة

تمنياتي لكم بالتوفيق

د.منى الدريني