جمهورية مصر العربيه
وزاره التعليم العـــالي
جامــعة بنهـــــــــا
كليـــة العلـــــــوم
قســـم الرياضيـــات

المـــادة: معادلات تفاضلية و دوال خاصة 318ر
الزمـــن:ساعتين
الفرقـــة: المستوى الثالث (فيزياء)
التــاريخ:15/6/ 2019 م
عدد الصفحات:2 صفحة

الاختبـــار النهائي
الفصل الدراسي الثاني

أجب عن الأسئلـــة الآتيـــة:

السـؤال الأول: (15 درجة):

1. أوجد حل المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^2 y$$

الذى يحقق الشرطين

$$u(x,0) = x^2, \qquad u(1,y) = \cos y$$

الحل:

يمكن كتابة المعادلة علي الصوره

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = x^2 y$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{1}{3}x^3 y + f(y)$$

$$u = \frac{1}{6}x^3 y^2 + \int f(y)dy + g(x)$$

$$u = \frac{1}{6}x^3 y^2 + H(y) + g(x)$$

بتطبيق الشروط المعطاة

$$H(0) + g(x) = x^2$$

$$\frac{1}{6}y^2 + H(y) + g(1) = \cos(y)$$

$$H(y) = \cos(y) - \frac{1}{6}y^2 - 1 + H(0)$$

$$u = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos(y) - \frac{1}{6}y^2 - 1 + H(0) + x^2 - H(0)$$

$$\therefore u = \frac{1}{6}x^3y^2 + \cos(y) - \frac{1}{6}y^2 - 1 + x^2$$

2. عرف تحويل لابلاس و من ثم أثبت ان $L\{e^{at}F(t)\} = f(s-a)$ و إذا كان $L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$ أوجد $L\{e^{-t}\cos 2t\}$.

الحل:

$$\because L\{F(t)\} = \int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$$

$$\therefore L\{e^{at}F(t)\} = \int_0^\infty e^{at}F(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty F(t)e^{-(s-a)t}dt$$

$$= f(s-a)$$

$$\because L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4}$$

$$\therefore L\{e^{-t}\cos 2t\} = \frac{s+1}{(s+1)^2+4} = \frac{s+1}{s^2+2s+5}$$

السؤال الثانى: (25درجة):

1. عرف صيغه لاجندر المزدوجه لداله جاما $\Gamma(x)$ و اثبت ان $\sqrt[3]{2}\,\Gamma(\frac{1}{6}) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}\,\Gamma^2(\frac{1}{3})$.

الحل:

$$\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

من صيغة لاجندر المزدوجة لدالة جاما

$$\Gamma(2x)=\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$$

نضع

$$x=\frac{1}{6}$$

$$\Gamma(\frac{1}{3})=\frac{2^{\frac{-2}{3}}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{6})\Gamma(\frac{2}{3})$$

$$\Gamma(\frac{1}{6})=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{-2}{3}}}\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{-2}{3}}}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})\Gamma(\frac{2}{3})}=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{-2}{3}}}\frac{\Gamma^2(\frac{1}{3})}{\pi}\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\sqrt[3]{2}\Gamma(\frac{1}{6})=\sqrt{\frac{3}{\pi}}\Gamma^2(\frac{1}{3})$$

2. اثبت أن $\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ ثم أثبت أن:

$$(i)\beta(m+1,n+1)=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$$(ii)\beta(x+1,y)=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

<u>الحل:</u> نعلم من تعريف دالة جاما أن

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-t}t^{p-1}dt$$

باستخدام التعويض $t=x^2\Rightarrow dt=2xdx$

$$\therefore\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-2}\cdot 2xdx$$

$$\therefore\Gamma(p)=2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2p-1}dx \qquad (a)$$

$$\therefore\Gamma(q)=2\int_0^\infty e^{-y^2}y^{2q-1}dy \qquad (b)$$

بضرب المعادلتين (a),(b) نحصل على

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}x^{2p-1}y^{2q-1}dxdy$$

باستخدام التعويض التالي

$$x=r\cos\theta \qquad , \qquad y=r\sin\theta$$

$$\therefore dxdy=rdrd\theta \qquad , \quad 0<r<\infty \ , \quad 0<\theta<\pi/2$$

نحصل على

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta\cdot\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2p+2q-1}dr$$

$$=2\int_0^\infty e^{-r^2}r^{2(p+q)-1}dr\cdot 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta d\theta$$

$$=\Gamma(p+q)\cdot\beta(p,q)$$

$$\therefore \beta(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$$

$$(i)\beta(m+1,n+1)=\frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$$

$$(ii)\beta(x+1,y)=\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y+1)}=\frac{x}{x+y}\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=\frac{x}{x+y}\beta(x,y)$$

السؤال الثالث(15درجات) :

1. أثبت أن $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ و من ثم أثبت أن $2^n\Gamma(n+\frac{1}{2})=1.3.5.....(2n-1)\sqrt{\pi}$

الحل:

من تعريف دالة جاما

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\therefore \Gamma(x+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x}dt$$

باستخدام التكامل بالتجزئ وذلك بوضع

$$u=t^x \qquad , \qquad dv=e^{-t}dt$$

$$du = xt^{x-1}dt \qquad , \qquad v = -e^{-t}$$

$$\therefore \Gamma(x+1) = -e^{-t}t^{x}\Big|_0^{\infty} + x\int_0^{\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

$$\therefore \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

بوضع $x = n - \frac{1}{2}$ نحصل على

$$\therefore \Gamma(n+\frac{1}{2}) = (n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

$$= (n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})(n-\frac{5}{2})\cdots\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$$

$$\therefore 2^n\Gamma(n+\frac{1}{2}) = 1.3.5...(2n-1)\sqrt{\pi}$$

2. **عرف صيغة رودريج لدالة لا جندر ثم اوجد بإستخدام تلك الصيغة** $\boldsymbol{P_0(x), P_1(x), P_2(x)}$ **.**

الحل:

$$\boldsymbol{P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}D^n(x^2-1)^n}$$

بوضع $n = 0$ فى المعادلة نجد أن

$$P_0(x) = 1$$

بوضع $n = 1$ فى المعادلة نجد أن

$$P_1(x) = \frac{1}{2}D(x^2-1) = \frac{1}{2}(2x) = x$$

بوضع $n = 2$ فى المعادلة نجد أن

$$P_2(x)=\frac{1}{4.2!}D^2(x^2-1)^2=\frac{1}{8}D(4x^3-x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$$

السؤال الرابع : (25درجة):

1. برهن ان $\int_{-1}^{1} xP_{n-1}(x)P_n(x)dx=\frac{2n}{4n^2-1}$.

الحل

من العلاقة التكرارية

$$(n+1)P_{n+1}(x)-(2n+1)xP_n(x)+nP_{n-1}(x)=0$$

إذا ضربنا هذه العلاقـــة في $P_{n-1}(x)$ وتم التكامل بالنســبة للمتغير x

من -1 إلى 1 فأننا نحصل على

$$(n+1)\int_{-1}^{1}P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)dx-(2n+1)\int_{-1}^{-1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx$$

$$+n\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)\,dx\;=0$$

التكامل الأول يساوي الصفر وذلك من شرط التعامد لكثيرات حدود لاجندر

$$\therefore\int_{-1}^{-1}xP_n(x)P_{n-1}(x)dx=\frac{n}{2n+1}\int_{-1}^{1}P_{n-1}^2(x)\,dx$$

$$=\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{2}{2(n-1)+1}=\frac{2n}{(2n+1)(2n-1)}$$

$$=\frac{2n}{4n^2-1}$$

2.بإستخدام معادلات لاجرانج المساعدة أوجد حل المعادلة $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y+z$

الحـــل:

يمكن وضع المعادلة السابقة على الصورة

$$p+q=x+y+z$$

وتكون معادلات لاجرانج المساعدة هي

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{x+y+z}$$

من النسبتين الأولى والثانية نجد أن

$$dx=dy \quad \Rightarrow \quad \therefore x-y=c_1 \quad \Rightarrow \quad \therefore u=x-y \quad \Rightarrow \quad \therefore x=c_1+y$$

من النسبتين الثانية والثالثة نجد أن

$$\frac{dy}{1}=\frac{dz}{x+y+z}=\frac{dz}{c_1+y+y+z} \Rightarrow \therefore dy=\frac{dz}{c_1+2y+z}$$

$$\therefore \frac{dz}{dy}=c_1+2y+z \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{dz}{dy}-z=c_1+2y$$

وهي معادلة تفاضلية خطية في y, z ومعاملها المكامل هو e^{-y} ويكون حلها

$$z\,e^{-y}=\int (c_1+2y)\,e^{-y}dy+c_2$$

بالتكامل بالتجزئ نجصل على

$$e^{-y}(z+x+y+2)=c_2 \quad \Rightarrow \quad \therefore v=e^{-y}(z+x+y+2)$$

ويكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية المعطاه هو

$$\Phi\Big((x-y), e^{-y}(z+x+y+2)\Big)=0$$

حيث Φ دالة اختيارية 0

3. بإستخدام تحويلات لابلاس أوجد حل المعادلتين الآنيتين مع الشروط المذكورة :

$$\frac{dX}{dt}=2X-3Y, \qquad \frac{dY}{dt}=Y-2X \quad , \quad X(0)=8, Y(0)=3$$

<u>الحل:</u>

بأخذ تحويلات لابلاس

$$sx(s)-8=2x(s)-3y(s)$$

$$(s-2)x(s)+3y(s)=8 \qquad \textbf{(1)}$$

$$sy(s)-3=y(s)-2x(s)$$

$$2x(s)+(s-1)y(s)=3 \qquad (2)$$

بضرب (1) فى $s-2$ و (2)في 2 و

الطرح نجد ان

$$y(s)=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-4}$$

و بمقارنه المعاملات نجد ان

$$y(s)=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

و بالمثل

$$x(s)=\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}$$

و باخذ تحويلات لابلاس العكسية

$$x(t)=5e^{-t}+3e^{4t}$$

$$y(t)=5e^{-t}-2e^{4t}$$

انتهت الأسئلة مع تمنياتنا بالتوفيق والنجاح

د/شيماء عزت وحيد الدين