جامعة بنـها – كلية العلوم – العام الدراسي 2019/2018 الفصل الثاني

أختبار المستوى الرابع – شعبة رياضيات

المادة / هيدروديناميكا ومرونـة (2) 432ر الزمن / ساعتان للورقة الإمتحانية الكاملة

المرونـة (2) الدرجات موزعة بالتساوي

السؤال الأول

إدرس تشوه جسم اسطواني مرن ومتجانس ومتماثل ومعلق من طرفه العلوي ويتمدد إلى أسفل تحت تأثير وزنه فقط 0

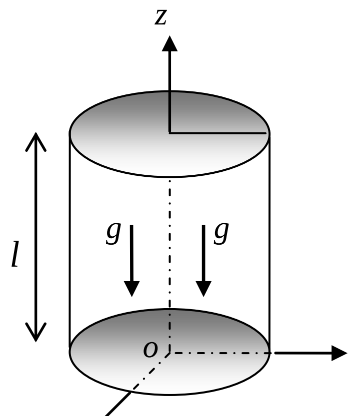
السؤال الثاني

بطريقة فوريير إدرس الموجات الطولية لشريط رفيع مرن على شكل اسطوانة موضوع في إتجاه محور x طوله l ومثبت من أحد طرفيه وطرفه الآخر حر 0

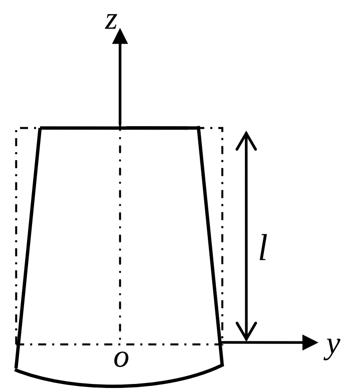
مع أطيب التمنيات بالنجاح **أنظر ورقة الهيدروديناميكا**

إجابة اختبار مادة المرونة (2) 432ر لطلبة المستوى الرابع - كلية العلوم -
شعبة رياضيات العام الدراسى 2019/2018 الفصل الدراسى الثانى تاريخ الاختبار 2019/5/22
نصف ورقة إمتحانية
أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :



(a)



(b)

أولاً : معادلة الإتزان في الصورة الكارتيزية هي

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \rho X = 0 \\ \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \rho Y = 0 \\ \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} - \rho g = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

حيث ρ الكثافة ، g عجلة الجاذبية الأرضية 0

حيث لا توجد مركبات للإجهاد إلا في إتجاه محور z فقط وذلك لأن القوة التى تؤثر على الجسم هي وزنه فقط ، أي أن

$$X_x = Y_y = 0 \quad , \quad X_y = Y_x = Z_x = 0 \qquad (2\text{-a})$$

ومن المعادلة الثالثة في (1) نجد أن

$$Z_z = \rho g z \qquad (2\text{-b})$$

وبالتالى نحصل على أن مركبات القوى الخارجية التي تؤثر على الجسم المرن هي

$$X = Y = 0 \quad ; \quad Z = -g$$

ونلاحظ أنه عندما $z=0$ فإن $Z_z=0$ أي أن السطح السفلي من الأسطوانة لا يوجد حمل يؤثر عليه 0 وبالتعويض بالقيم (2) في الشروط السطحية

$$\left.\begin{aligned} X_v &= X_x\, l + X_y\, m + X_z\, n \quad ; \\ Y_v &= Y_x\, l + Y_y\, m + Y_z\, n \quad ; \\ Z_v &= Z_x\, l + Z_y\, m + Z_z\, n \quad ; \end{aligned}\right\}$$

نجد أن $X_v = Y_v = Z_v = 0$ أي أن السطح الجانبي للأسطوانة لايؤثر علية أي إجهادات 0

بالتعويض عن مركبات الإجهاد في قانون هوك

$$\left.\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{1}{E}\left[X_x - \sigma(Y_y + Z_z)\right] \quad ; \quad e_{xy} = \frac{1}{G}X_y \\ e_{yy} &= \frac{1}{E}\left[Y_y - \sigma(Z_z + X_x)\right] \quad ; \quad e_{yz} = \frac{1}{G}Y_z \\ e_{zz} &= \frac{1}{E}\left[Z_z - \sigma(X_x + Y_y)\right] \quad ; \quad e_{zx} = \frac{1}{G}Z_x \end{aligned}\right\}$$

نحصل على

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\sigma\rho g}{E}z \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\sigma\rho g}{E}z \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\rho g}{E}z \right\} \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \right\} \qquad (4)$$

بتكامل المعادلات (3) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\sigma\rho g}{E}xz + f(y,z) \\ v &= -\frac{\sigma\rho g}{E}yz + \phi(x,z) \\ w &= \frac{\rho g}{2E}z^2 + \psi(x,y) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

بالتعويض بالدوال (5) في المعادلات التفاضلية (4) نجد أن

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\sigma\rho g}{E}y \quad ; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\sigma\rho g}{E}x \right\} \qquad (6)$$

من المعادلات (6) نجد أن التفاضلات من الرتبة الثانية للدالة f تكون على الصورة

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \quad ; \quad 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ f=ax+bz+c$$

حيث a,b,c ثوابت 0 وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\phi=-ax+ez+m \qquad ; \qquad \psi=\frac{\rho g \sigma}{2E}(x^2+y^2)-bx-ey+k$$

حيث e,m,k ثوابت 0إذن دوال الإزاحة هي

$$\left.\begin{aligned} &u=-\frac{\sigma \rho g}{E}xz+ay+bz+c \quad ; \quad v=-\frac{\sigma \rho g}{E}yz-ax+ez+m \\ &w=\frac{\rho g}{2E}\left[z^2+\sigma(x^2+y^2)\right]-bx-ey+k \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

ولكننا ثبتنا مركز المقطع العلوي من الأسطوانه أي أنه عندما $x=0\,,\,y=0$ كانت $z=l$ بالتعويض في (7) ومركبات إزاحة هذه النقطة تنعدم لأنها ثابتة أي أن $u=0,v=0,w=0$ وأيضاً المشتقات الجزئية لإزاحة نقطة التثبيت تنعدم أي أن بتفاضل المعادلة الأولى من (7) بالنسبة إلى z ثم بالتعويض عن $x=0$ نجد أن $b=0$ وبتفاضل المعادلة الثانية من (7) بالنسبة إلى x وبالنسبة إلى z نجد أن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-a=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore a=0 \qquad ; \qquad \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{y=0}=e=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore e=0$$

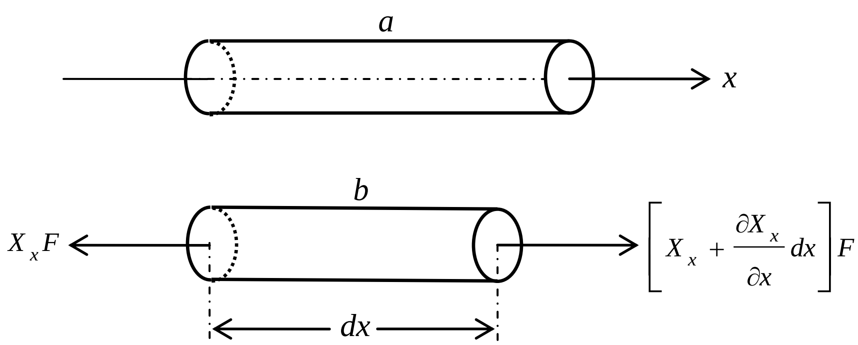
$$w\big|_{x=0,y=0,z=l}=\frac{\rho g}{2E}l^2+k \quad \Rightarrow \quad \therefore k=-\frac{\rho g}{2E}l^2$$

مما سبق ينتج أن $k=-\frac{\rho g}{2E}l^2\ ,\ a=b=c=e=m=0$ 0 أي أن

$$\left.\begin{aligned} &u=-\frac{\sigma \rho g}{E}xz \quad ; \quad v=-\frac{\sigma \rho g}{E}yz \\ &w=\frac{\rho g}{2E}\left[z^2-l^2+\sigma(x^2+y^2)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

وهذه تمثل الإزاحات لكل نقطة من الأسطوانة المرنة المثبتة من مركز القطاع العلوي لها ولا يؤثر عليها إلا وزنها فقط 0

إجابة السؤال الثاني :



سوف نتعامل في هذا الجزء مع وسط مرن غير محدود أي وسط يمتد بلا حدود في إتجاه الإحداثيات x, y, z 0 إذا تأملنا شريط رفيع على شكل أسطواني في إتجاه محور x كما في الشكل (a – 3) فإن الإهتزازات التي تحدث له تختلف إلى حد ما عن الإهتزازات التى تحدث لوسط مرن غير محدود ، على سبيل المثال عندما يتعرض لموجات إهتزازاتة طولية سوف تختلف الأبعاد الجانبية جنبا إلى جنب مع الإستطالة الطولية e_{xx} ، وبالتالي بإضافة الإزاحة الطولية u سوف تظهر إزاحات مستعرضة w, v وتتعقد دراسة الظاهرة ولكن عند دراسة شريط رفيع جداً فإننا يمكن أن نهمل الإنفعالات المستعرضة بدون حدوث خطأ فادح في الدراسة ، وبالتالي يمكننا إشتقاق المعادلة التفاضلية للموجة الطولية لهذا الشريط 0 دعنا نعزل من هذا الشريط عنصر طوله dx كما في شكل (b – 3) فنتيجة عزل هذا العنصر من الأجزاء المحيطة به تظهر عليه قوتان هما

$$-X_x F \quad ; \quad \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx\right) F$$

حيث F مساحة المقطع للشريط الرفيع جداً 0 كتلة العنصر المعزول هي $\rho F dx$ وتكون معادلة حركته هي

$$\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} dx F \quad \Rightarrow \quad \therefore \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} \qquad (32)$$

ولكن بعد إهمال الإنفعالات المستعرضة ومن قانون هوك (الباب السابق) نجد أن

$$X_x = E e_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \therefore \frac{\partial X_x}{\partial x} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

بالتعويض في المعادلة (32) نحصل على

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_1^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (33)$$

حيث

$$a_1^2 = \frac{E}{\rho} \qquad (34)$$

المعادلة (33) تختلف عن المعادلة (16) في الثابت فقط المعينان من المعادلتين (34),(17) 0ويمكن وضع المعادلات (16) , (19) , (33) على الصورة

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (35)$$

حيث α ثابت ويمكن أن يساوي a, b, a_1 0 ولحل المعادلة (35) نفرض أن الحل على الصورة

$$u = X(x)\, T(t) \qquad (36)$$

حيث X دالة تعتمد على المتغير x ، T دالة تعتمد على المتغير t فقط ، بالتعويض في (35) نجد أن

$$X \frac{d^2 T}{dt^2} = \alpha^2 T \frac{d^2 X}{dx^2}$$

بفصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{1}{\alpha^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{1}{X} \frac{d^2 T}{dx^2} \qquad (37)$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر دالة تعتمد فقط على المتغير t والطرف الأيمن دالة تعتمد على المتغير x وحيث أن كل من الطرفين متساويان وكل منهما يعتمدان على متغير مستقل يختلف عن الآخر لذلك لا يمكن أن يتحقق ذلك إلا في حالة واحدة فقط وهي أن يساوي كل من الطرفين ثابت وهو نفسه للطرفين وليكن $-\lambda^2$ وإخترنا الإشارة السالبة والتربيع حتى نضمن أن يكون الحلول تمثل دالة موجية 0 أي أن

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -\lambda^2 \alpha^2 T \qquad ; \qquad \frac{d^2 X}{dx^2} = -\lambda^2 X$$

والحل العام لهاتين المعادلتين هو

$$T = A\cos\lambda\alpha t + B\sin\lambda\alpha t \quad ; \quad X = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

ويكون الحل الخاص للمعادلة (35) هو

$$u = (A\cos\lambda\alpha t + B\sin\lambda\alpha t)\,(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x) \tag{38}$$

حيث A, B, C, D, λ ثوابت وبتغير هذه الثوابت نحصل على عدد لانهائي من الحلول الخاصة لذلك يكون الحل العام على الصورة

$$u = \sum (A\cos\lambda\alpha t + B\sin\lambda\alpha t)\,(C\cos\lambda x + D\sin\lambda x) \tag{39}$$

حيث الثوابت A, B, C, D, λ تتعين من الشروط الإبتدائية للمسألة لذلك إذا إعتبرنا أن طول الشريط l مقاساً من الطرف السفلي المدمج في تنفيذ الإهتزازات الطولية 0

الشرط الحدي عند الطرف السفلي هو عند أي زمن فإن $u = 0$ ، $x = 0$ ومن هذا الشرط نحصل على $C = 0$ وبالتالي نحصل على الحل العام على الصورة

$$u = \sum (A_1\cos\lambda\alpha t + B_1\sin\lambda\alpha t)\sin\lambda x \tag{40}$$

ونفرض أن الطرف الآخر من الشريط حر أي لم تحدث له إستطالة أي عند أي لحظة زمنية t كانت $x = l$ ، $e_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ من هذا نحصل على $\cos\lambda l = 0$ أي أن

$$\lambda l = \frac{n\pi}{2} \qquad or \qquad \lambda = \frac{n\pi}{2l} \qquad ; \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

وبالتالي تصبح المعادلة (40) على الصورة

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi}{2l}\alpha t + B_n\sin\frac{n\pi}{2l}\alpha t\right)\sin\frac{n\pi}{2l}x \tag{41}$$

لتعيين الثوابت $A_n\,,\,B_n$ نعود إلى الشروط الإبتدائية للقضيب عند اللحظة الزمنية $t = 0$ نفرض أن عند هذه اللحظة كانت إزاحة جميع نقاط القضيب u وسرعاتها $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ على الصورة

$$\left.\begin{aligned} & u_{t=0} = f(x) \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=0} = \varphi(x) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\pi\alpha}{2l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\sin\frac{n\pi}{2l}\alpha t + B_n\cos\frac{n\pi}{2l}\alpha t\right)\sin\frac{n\pi}{2l}x \tag{43}$$

بالتعويض من المعادلات (42),(43) في المعادلة (41) نحصل على

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{2l}x \\ \phi(x) &= \frac{\alpha\pi}{2l}\sum_{n=1}^{\infty} B_n\ n\sin\frac{n\pi}{2l}x \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

بضرب المعادلة الأولى والثانية من (44) في $\sin\frac{n\pi}{2l}x$ وبالتكامل بالنسبة إلى x من $x=-l$ إلى $x=l$ نحصل على

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\,dx \\ B_n &= \frac{2}{n\pi\alpha}\int_{-l}^{l}\phi(x)\sin\frac{n\pi}{2l}x\,dx \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

بالتعويض عن الثابتان A_n , B_n في المعادلة (41) نكون قد حصلنا على الحل العام للمعادلة الموجية (35) 0 طريقة الحل السابقة تسمى طريقة فوريير 0