المرونة

أجب عن الأسئلة الآتية (الدرجات موزعة بالتساوى) :

السؤال الأول

أ- استنتج المعادلات التفاضلية لإتزان جسم مرن كثافته ρ و مركبات القوى الجسمية المؤثرة على وحدة الكتل هي X, Y, Z 0

ب- إذا كانت مصفوفة الإجهاد تعطى بالعلاقة :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 4x \\ 2y & 4x & 1 \end{bmatrix} \quad MPa$$

أوجد متجه القوى الجسمية لتحقق مصفوفة الإجهاد حالة إتزان 0

السؤال الثاني

أ- إذا أعطيت مركبات متجه الإزاحة $\underline{u}$

$$u = (3x^4 + 2x^2y^2 + x + y + z^3 + 3)\,(10)^{-3}$$
$$v = (3xy + y^3 + y^2z + z^2 + 1)\,(10)^{-3}$$
$$w = (x^2 + xy + yz + zx + y^2 + z^2 + 2)\,(10)^{-3}$$

عين مركبات ممتد الإنفعال عند النقطة $(1,1,1)$ 0

ب- إذا كانت مركبات الإجهاد عند نقطة في جسم مجهد هي

$$X_x = k\,y^2 \quad ; \quad Y_y = -k\,x^2 \quad ; \quad Z_z = 0$$
$$X_y = 0 \quad ; \quad X_z = 0 \quad ; \quad Y_z = 0$$

حيث k ثابت ، عين مركبات الإزاحة $u(x,y)\,, v(x,y$ 0

مع أطيب التمنيات بالنجاح

أنظر ورقة إختبار الهيدروديناميكا

إجابة اختبار مادة المرونة 431ر لطلبة المستوى الثالث - كلية العلوم - شعبة رياضيات العام الدراسى 2019/2018 الفصل الدراسى الأول تاريخ الاختبار الأحد الموافق 2019/1/13

نصف ورقة إمتحانية

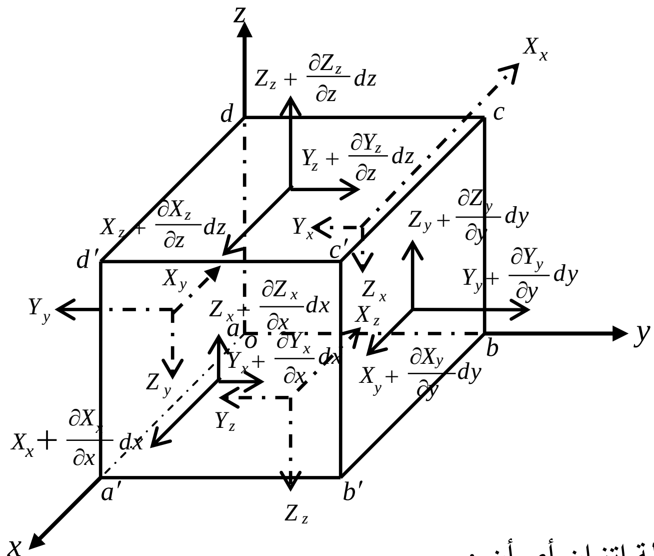
أستاذ المادة د/ مجدى مصطفى حسين كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الاول :

أ- المعادلات التفاضلية لإتزان الجسم المرن :

مركبات القوى الجسمية التي تؤثر على هذا العنصر هي

$$X\rho\, dxdydz \;\;,\;\; Y\rho\, dxdydz \;\;,\;\; Z\rho\, dxdydz$$



نفرض أن الجسم المرن في حالة إتزان أي أن :

$$\left.\begin{array}{ll}\sum R_x=0\,, & \sum M_x=0\\ \sum R_y=0\,, & \sum M_y=0\\ \sum R_z=0\,, & \sum M_z=0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

حيث $M_x, M_y, M_z\,;R_x, R_y, R_z$ مركبات محصلة القوى في إتجاه المحاور ومركبات العزوم حول حول المحاور على الترتيب 0لكي نحصل على معادلة إتزان الجسم المرن في إتجاه محور x فإننا نستخدم الشرط $\sum R_x=0$ 0 إذا كان لدينا عنصر من الجسم المرن على شكل متوازي مستطيلات وأبعاده $dx\,,dy\,,dz$ وثلاث أحرف منه تنطبق على محاور الإحداثيات ، بمساواة محصلة القوى في إتجاه محور x بالصفر نحصل على

$$\left(X_x+\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dydz-X_xdydz+\left(X_y+\frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right)dxdz-X_ydxdz$$
$$+\left(X_z+\frac{\partial X_z}{\partial z}dz\right)dxdy-X_zdxdy+X\rho dxdydz=0 \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho\, X=0$$

وإذا كان الجسيم يتحرك وكانت مركبات إزاحته في إتجاه المحاور هي (u,v,w) ، فإن المعادلة (a) تصبح على الصورة

$$\left(X_x+\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dydz-X_x dydz+\left(X_y+\frac{\partial X_y}{\partial y}dy\right)dxdz-X_y dxdz$$

$$+\left(X_z+\frac{\partial X_z}{\partial z}dz\right)dxdy-X_z dxdy+X\rho dxdydz=0 \quad \left(=\rho\, dxdydz\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

وبالمثل في إتجاه محوري z, y نحصل على

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=0 \quad or \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=0 \quad or \quad \frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

مما سبق حصلنا على مجموعتين من معادلات الإتزان لجسم مرن المجموعة الأولى إذا كان الجسم ساكن

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\rho X=0\\
&\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}+\rho Y=0\\
&\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\rho Z=0
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

ب- بالتعويض عن مركبات الإجهاد في معادلات الإتزان نجد أن

$$\rho X=0 \;\Rightarrow\; \therefore X=0 \;;\; \rho Y=0 \;\Rightarrow\; \therefore Y=0 \;;\; \rho Z=0 \;\Rightarrow\; \therefore Z=0$$

مما يعنى أن مركبات الإجهاد في حالة إتزان في غياب القوى الجسمية 0

إجابة السؤال الثانى :

أ- نعلم أن مركبات ممتد الإنفعال تعرف بدلالة متجه الإزاحة في الصورة :

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x} \;;\; e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y} \;;\; e_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z} \;;\; e_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y} \;;\; e_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z} \;;\; e_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}$$

بالتعويض في العلاقات السابقة عن مركبات الإزاحة نجد أن

$$e_{xx}=(12x^3+4xy^2+1)\,(10)^{-3} \;;\; e_{yy}=(3x+3y^2+2yz)\,(10)^{-3}$$

$$e_{zz}=(y+x+2z)\,(10)^{-3}$$

$$e_{xy}=(4x^2y+1)\,(10)^{-3}+(3y)\,(10)^{-3}=(4x^2y+3y+1)\,(10)^{-3}$$

$$e_{yz}=(y^2+2z)\,(10)^{-3}+(x+z+2y)\,(10)^{-3}=(y^2+3z+2y+x)\,(10)^{-3}$$

$$e_{xz}=(3z^2)\,(10)^{-3}+(2x+y+z)\,(10)^{-3}=(3z^2+2x+y+z)\,(10)^{-3}$$

بالتعويض بالنقطة (1,1,1) نحصل على

$$e_{xx}=(17)\,(10)^{-3}\quad;\quad e_{yy}=(8)\,(10)^{-3}\quad;\quad e_{zz}=(4)\,(10)^{-3}$$
$$e_{xy}=(8)\,(10)^{-3}\quad;\quad e_{yz}=(7)\,(10)^{-3}\quad;\quad e_{xz}=(7)\,(10)^{-3}$$

ب- نعين أولا مركبات الإنفعال بدلالة مركبات الإجهاد

نعلم أن

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}\quad;\quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$e_{xx}=\frac{1}{E}\left[X_x-\sigma(Y_y+Z_z)\right]=\frac{k}{E}y^2+\frac{\sigma k}{E}x^2=\frac{k}{E}(y^2+\sigma x^2)$$
$$e_{yy}=\frac{1}{E}\left[Y_y-\sigma(X_x+Z_z)\right]=-\frac{k}{E}x^2-\frac{\sigma k}{E}y^2=-\frac{k}{E}(x^2+\sigma y^2)$$

ومن ذلك نجد أن

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{k}{E}(y^2+\sigma x^2)\quad\Rightarrow\quad u=\frac{k}{E}\left[y^2x+\frac{\sigma}{3}x^3\right]+c_1(y)$$
$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{k}{E}(x^2+\sigma y^2)\quad\Rightarrow\quad v=-\frac{k}{E}\left[x^2y+\frac{\sigma}{3}y^3\right]+c_2(x)$$

حيث $c_1(y)\,,c_2(x)$ ثوابت التكامل 0

$$e_{xy}=\frac{1}{G}X_y=0\quad\Rightarrow\quad\therefore\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\quad\Rightarrow\quad\therefore\frac{k}{E}\left[2yx\right]+c_1'(y)=\frac{k}{E}\left[2xy\right]=c_2'(x)$$
$$\therefore c_1'(y)=c_2'(x)\quad\Rightarrow\quad\therefore c_1(y)=c_2(x)=c$$
$$\therefore u=\frac{k}{E}\left[y^2x+\frac{\sigma}{3}x^3\right]+c\qquad;\qquad v=-\frac{k}{E}\left[x^2y+\frac{\sigma}{3}y^3\right]+c$$
