جامعة بنها – كلية العلوم - الفصل الدراسي الأول للعام 2019/2018

امتحان المستوى الرابع – حاسب آلي

المادة / الجبر الخطى والهندسة الفراغية 224 ر **الزمن / ساعتان**

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول :

أ- أي المجموعات الآتية تكون فراغ جزئي من R^2 وأيها لا مع ذكر السبب في كل حالة : **(10 درجات)**

$$W_1 = \{ (x,y) : x + y = 0 \} \qquad , \qquad W_2 = \{ (x,y) : y = e^x \}$$

ب- أوجد حل نظام المعادلات الخطية **(10 درجات)**

$$x + 2y + z = 2 \quad , \quad 3x + y - 2z = 1 \quad , \quad 4x - 3y - z = 3 \quad , \quad 2x + 4y + 2z = 4$$

السؤال الثاني :

أ- أعتبر التحويلة **(20 درجات)**

$$T : R^2 \to R^2 \quad : \quad T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 \, , 2x_1 - 4x_2)$$

أثبت أن T تحويلة خطية ثم أوجد نواة التحويلة $Ker(T)$ وكذلك مصفوفة التحويلة A ثم أوجد تأثير المصفوفة A على المتجه

$(1,2)$ 0

ب- أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية المناظرة للمصفوفة **(10 درجات)**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ثم حول هذه المصفوفة للشكل القطري 0

السؤال الثالث :

أ- في الفراغ R^4 معطى لك مجموعة المتجهات **(10 درجات)**

$$V_1 = (1,2,1,-1) \quad , \quad V_2 = (1,0,2,-3) \quad , \quad V_3 = (1,1,0,-2) \quad , \quad V_4 = (2,1,5,-5)$$

أثبت أن المتجه V_4 يكون تركيبة خطية من V_1 , V_2 , V_3 0 هل مجموعة المتجهات V_1 , V_2 , V_3 , V_4 تكون مستقلة خطياً ولماذا ؟

ب- أوجد معادلة المستوى المار بالنقطة $p = (1,-2,1)$ والموازي للمتجهين **(10 درجات)**

$$\underline{u} = 5\,\underline{i} - \underline{k} \qquad ; \qquad \underline{v} = -3\,\underline{i} + 2\,\underline{j} + \underline{k}$$

جـ - أوجد المعادلات البارامترية للخط المستقيم المار بالنقطة $(1,-1,-3)$ ويوازي المستقيم **(10 درجات)**

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$$

مع أطيب التمنيات بالنجاح

إجابة اختبار مادة جبر خطي وهندسة فراغية 224 ر المستوى الرابع شعبة حاسب آلي - كلية العلوم العام الدراسي 2019/2018

الفصل الدراسي الأول تاريخ الاختبار الأحد الموافق 2019/1/20 ورقة إمتحانية كاملة

أستاذ المادة د/ محمد سعد سند كلية العلوم قسم الرياضيات – جامعة بنها

إجابة السؤال الأول :

أ- أولاً : نفرض أن $(i)\ u_1=(x_1,y_1)\,,u_2=(x_2,y_2)\in W_1$

$$\therefore u_1+u_2=(x_1+x_2,y_1+y_2)\Rightarrow y_1+y_2+x_1+x_2=(x_1+y_1)+(x_2+y_2)=0+0=0\Rightarrow u_1+u_2\in W_1$$

$$(ii)\ u=(x,y)\,,\lambda\in R\Rightarrow \lambda u=(\lambda x,\lambda y)\Rightarrow \lambda x+\lambda y=\lambda(x,y)=\lambda(0)\Rightarrow \lambda u\in W_1$$

$$\therefore W_1\subset\subset R^2$$

ثانياً : بفرض أن $u_1,u_2\in W_2$

$$\therefore y_1=e^{x_1}\ ,\ y_2=e^{x_2}\Rightarrow y_1+y_2=e^{x_1}+e^{x_2}\neq e^{x_1+x_2}\Rightarrow u_1+u_2\notin W_2\Rightarrow W_2\not\subset R^2$$

ب-

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\3&1&-2&1\\4&-3&-1&3\\2&4&2&4\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&-5&-5&-5\\0&-11&-5&-5\\0&0&0&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&-11&-5&-5\\2&0&0&0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\0&1&1&1\\0&0&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$-z=-1\Rightarrow z=1\quad,\quad y+z=1\Rightarrow y=0\quad,\quad x+2y+z=2\Rightarrow x=1$$

$\therefore$ حل نظام المعادلات الخطية هو $x=1,y=0,z=1$ 0

إجابة السؤال الثاني :

أ- $T:R^2\to R^2\quad:\quad T(x_1,x_2)=(x_1+x_2\,,\,2x_1-4x_2)$

من السهل إثبات أن T تحويلة خطية وتكون نواة التحويلة هي

$$Ker(T)=\{(x_1,x_2):x_1+x_2=0\,,2x_1-4x_2=0\}=\{(x_1,x_2):x_1=x_2=0\ \}=\{(0,0)\}$$

$$A=\begin{pmatrix}T(e_1)&T(e_2)\\\vdots&\vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T(1,0)&T(0,1)\\\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\2&-4\end{pmatrix}$$

$$A(1,2)=\begin{pmatrix}1&1\\2&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=(3,-6)=3(1,-2)$$

ب-

$$|A-\lambda I|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\-2&4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(1-\lambda)(4-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=2\,,\lambda_2=3$$

المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ -2 & 4-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \therefore x_1 = y_1 = 1 \Rightarrow X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

المتجه الذاتي المناظر للقيمة الذاتية $\lambda_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 1 \\ -2 & 4-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \therefore x_2 = 1 , y_2 = 2 \Rightarrow X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

مصفوفة التحويل هي

$$P = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

إجابة السؤال الثالث :

أ- نفرض أن

$$V_4 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$$
$$\therefore (2,1,5,-5) = \alpha_1 (1,2,1,-1) + \alpha_2 (1,0,2,-3) + \alpha_3 (1,1,0,-2)$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2 \quad , \quad 2\alpha_1 + \alpha_3 = 1 \quad , \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = 5 \quad , \quad -\alpha_1 - 3\alpha_2 - 2\alpha_3 = -5$$

وبحل نظام المعادلات الخطية نوجد قيم $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ولذلك فإن V_4 يمكن كتابته كتركيبة خطية من المتجهات V_1 , V_2 , V_3 وحيث أن $V_4 = \alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \alpha_3 V_3$ فإن المتجهات V_1 , V_2 , V_3 , V_4 تكون مرتبطة خطياً حيث يمكن كتابة أحدهم كتركيبة خطية من الباقين 0

ب- المتجه العمودي على المستوى

$$\underline{u} \wedge \underline{v} = (5,0,-1) \wedge (-3,2,1) = (2,-2,10)$$

وتكون معادلة المستوى هي $Lx + My + Nz = d \Rightarrow 2x - 2y + 10z = d$ وحيث أن المستوى يمر بالنقطة $(1,-2,1)$ فهي تحقق معادلته ومن ذلك نحصل على أن $d = 16$ ، إذن معادلة المستوى المطلوبة هي

$$2x - 2y + 10z = 16 \Rightarrow x - y + 5z = 8$$

جـ - نسب إتجاه المستقيم المطلوب هي نفسها نسب إتجاه المستقيم المعطى وهي $5,2,-1$ وتكون المعادلات البارامترية للمستقيم المطلوب هي

$$x = 1 + 5\lambda \quad , \quad y = -2 + 2\lambda \quad , \quad z = -1 - \lambda$$